ESTUDIOS ECONÓMICOS ESTADÍSTICOS

Contribución Sectorial al Crecimiento Trimestral del PIB

Marcus Cobb

N.°100 Junio 2013

BANCO CENTRAL DE CHILE

BANCO CENTRAL DE CHILE

CENTRAL BANK OF CHILE

A contar del número 50, la Serie de Estudios Económicos del Banco Central de Chile cambió su nombre al de Estudios Económicos Estadísticos.

Los Estudios Económicos Estadísticos divulgan trabajos de investigación en el ámbito económico estadístico realizados por profesionales del Banco Central de Chile, o encargados por éste a especialistas o consultores externos. Su contenido se publica bajo exclusiva responsabilidad de sus autores y no compromete la opinión del Instituto Emisor. Estos trabajos tienen normalmente un carácter definitivo, en el sentido que, por lo general, no se vuelven a publicar con posterioridad en otro medio final, como una revista o un libro.

As from issue number 50, the *Series of Economic Studies* of the Central Bank of Chile will be called *Studies in Economic Statistics.*

Studies in Economic Statistics disseminates works of investigation in economic statistics carried out by professionals of the Central Bank of Chile or by specialists or external consultants. Its content is published under exclusive responsibility of its authors and it does not reflect the opinion of the Central Bank. These documents normally are definitives and are not made available in any other media such as books or magazines.

Estudios Económicos Estadísticos del Banco Central de Chile
Studies in Economic Statistics of the Central Bank of Chile
ISSN 0716 - 2502

Estudios Económicos Estadísticos
N° 100

Studies in Economic Statistics
N° 100

CONTRIBUCIÓN SECTORIAL AL CRECIMIENTO TRIMESTRAL DEL PIB[1]

Marcus Cobb
Gerencia de Estadísticas Macroeconómicas
Banco Central de Chile

Resumen

El uso de un método de índices encadenados reduce significativamente el problema de la obsolescencia de la estructura de precios relativos que exhiben los índices de base fija para periodos distantes a la referencia. Sin embargo, la actualización de precios introduce una nueva dimensión que puede contribuir a confundir al analista si no se toma en consideración. Tal vez la dificultad más notoria que ha generado la introducción de índices encadenados es que no es posible obtener un agregado como la suma simple o ponderada de sus componentes y por lo tanto no es sencillo explicar en términos de éstos la evolución del primero. En este documento se desarrolla un marco para entender, desde una perspectiva sectorial, los fenómenos involucrados en la evolución de un agregado encadenado por superposición anual. En particular, se presenta una forma exacta para calcular la contribución sectorial a la variación del PIB trimestral que es coherente con su contrapartida anual y que solo requiere de las series de componentes reales en frecuencia trimestral y las nominales en frecuencia anual.

Abstract

The use of chain-linked methods reduces significantly the problem of price structure obsolescence present in fixed base environments. However, price updating introduces a new dimension that may produce confusion if not accounted for. Probably the most notorious difficulty generated by the introduction of chain-linked indices has been that an aggregate is not the direct sum of its components, therefore, making it harder to explain its behaviour. This document develops a framework to understand, from the industry perspective, the elements that affect the behaviour of an aggregate obtained using the annual overlap chain-linking method. In the process, an exact expression for the industry contribution to the quarterly GDP growth is presented that is consistent with the annual contribution and that only requires the real quarterly figures and the nominal annual values.

[1] E-mail: mcobb@bcentral.cl.

1. Introducción

El análisis macroeconómico centra parte importante de su atención en la evolución de las variables reales de la economía. De ahí la necesidad de contar con series agregadas de medidas de cantidades o *quantum.* El Producto Interno Bruto (PIB) es el indicador por excelencia para medir la evolución real de la economía, pero existen muchos otros. Por razones obvias, la construcción de estos indicadores no es trivial pues no es posible sumar distintos productos directamente. Dado esto, para comparar en el tiempo la evolución real de un indicador agregado, es necesario valorarlo para su construcción y luego remover de alguna forma la incidencia de los precios.

Históricamente, la remoción del efecto de los precios se ha realizado valorando las cantidades de los distintos periodos a precios de un año particular, llamado año base. Este enfoque, relativamente simple, impone el patrón y la inercia de precios relativos del año base, los que en la medida que transcurre el tiempo pierden progresivamente relevancia y representatividad, distorsionando la información que entregan las mediciones en términos reales. Por ello es necesario actualizar el patrón de precios con un nuevo año base con cierta periodicidad. Asimismo, para generar series de tiempo consistentes, cada vez que se realiza una actualización, es necesario que la antigua base sea vinculada o encadenada a la nueva.

En línea con las recomendaciones del Sistema de Cuentas Nacionales (SCN, 1993) muchos países, entre ellos Chile, han tendido hacia una actualización anual del patrón de precios en sus series de actividad resultando en series encadenadas anualmente. Si bien este método reduce significativamente el problema de la obsolescencia de la estructura de precios relativos, la actualización periódica de la estructura de precios introduce una nueva dimensión ausente en el marco conceptual de los índices de base fija.

En particular, surge el fenómeno de la no aditividad de las series -lo que significa que la suma de los componentes para un periodo no resulta en el total-. Ello levanta desafíos prácticos y puede contribuir a desorientar al analista. Lamentablemente, es imprudente ignorar el problema asumiendo que las identidades contables básicas del marco conceptual de los índices de base fija siguen cumpliéndose en el marco de series encadenadas. Ello porque dicha práctica podría conducir a conclusiones erróneas en escenarios de cambios significativos en la estructura de precios (OCDE, 2006a).

Para enfrentar el problema, la práctica ha consistido en descomponer el crecimiento del agregado en las contribuciones de los distintos componentes, las que acumuladas, a diferencia de los niveles, si suman el total. Sin embargo, la forma en la que se calculan estas contribuciones depende primeramente de la metodología de encadenamiento utilizada. Canadá y Estados Unidos, por ejemplo, a diferencia de la mayoría de los países, utilizan índices de Fisher encadenados (OCDE, 2006a)[1], lo que se traduce en que su metodología de cálculo de contribuciones no sirva de referencia para el resto. Por otro lado, la posibilidad de implementación de tres técnicas alternativas para el encadenamiento anual de datos trimestrales -la superposición anual, la superposición trimestral y el uso de la variación respecto del mismo periodo del año anterior[2]- también contribuye a la coexistencia de diferentes metodologías.

[1] La mayoría de los países utilizan series de Laspeyres encadenadas. En IMF (2001) se presentan ambas.

[2] Para mayores detalles respecto de los métodos, referirse a IMF (2001).

La técnica de superposición anual es la metodología de encadenamiento más práctica para las medidas de volumen de tipo Laspeyres dado que la suma de los trimestres resulta exactamente en el total anual (IMF, 2001) y es la que se utiliza para las cuentas nacionales en Chile (Guerrero et. al., 2012). Para esta técnica, el cálculo de la contribución sectorial del PIB anual es sencillo, sin embargo, en frecuencia trimestral no lo es tanto. La dificultad radica en encontrar la ponderación apropiada que permita que las contribuciones sumen exactamente la variación del agregado dado que las ponderaciones de los componentes cambian de un año a otro (OCDE, 2006b).

Para enfrentar el problema, los países que utilizan la superposición anual no han seguido un enfoque único. Evidencia de ello se encuentra en OCDE (2006b) donde se menciona que Australia y Reino Unido, por ejemplo, actualizan constantemente el año de referencia al último año base de forma que los periodos más recientes exhiban aditividad. Este proceso significa que, si bien las tasas de crecimiento no se ven afectadas, los niveles de los componentes se revisan anualmente por este concepto. También menciona que otros países, en cambio, calculan las contribuciones en base a cifras expresadas a precios del año previo, lo que conlleva un proceso engorroso y difícil de replicar para agentes externos. Por otra parte, en una nota metodológica, la OCDE explica que para sus cifras se utiliza un método que sirve como aproximación pero se advierte que en términos estrictos no es correcta (OCDE, 2013).

En este documento se desarrolla un marco para entender, desde una perspectiva sectorial, los fenómenos involucrados en la evolución de un agregado trimestral encadenado por superposición anual y en particular, se presenta una expresión exacta para calcular la contribución sectorial a la variación del PIB trimestral. Esta expresión es coherente con su contrapartida anual y sólo requiere de las series de los componentes reales en frecuencia trimestral y las nominales en frecuencia anual. Con este objetivo en mente, en la sección 2 se explica brevemente la metodología de superposición anual y el cálculo de contribuciones en frecuencia anual. En la sección 3 se construye el marco para entender los elementos que interactúan en el agregado trimestral para luego presentar y explicar la expresión para la contribución trimestral. En la sección 4, como ejemplo, se aplica el cálculo de la contribución para el sector de la Minería de Cobre y finalmente, las conclusiones se resumen en la sección 5.

2. Índices encadenados por superposición anual y contribución a la variación anual

La elaboración de indicadores de variables reales normalmente consiste en comparar distintos periodos manteniendo inalterados los precios. El enfoque más simple ha sido el de expresar la serie completa a precios de un año particular o base. Este enfoque, sin embargo, está sujeto a la obsolescencia de la estructura de precios en la medida que la medición se aleja del año base. Para solucionar el problema de la pérdida de relevancia y representatividad de los precios relativos, y en línea con las recomendaciones del Sistema de Cuentas Nacionales (SCN, 1993) muchos países, entre ellos Chile, han tendido hacia una actualización anual del patrón de precios en sus series de actividad.

2.1. Índices encadenados por superposición anual

Existen varias metodologías disponibles para la implementación de los índices encadenados y en el caso de Chile se optó por el método de superposición anual. En ésta, se calcula para cada periodo la variación entre el año actual (y), valorado a precios promedios del año anterior (y-1), y el año anterior a precios corrientes (y-1) y luego, en base a la variación entre ambos se construye una serie de tiempo[3].

Tabla 2.1: Construcción de un índice encadenado por superposición anual

Año	*Cantidades A*	*Cantidades B*	*Precios A*	*Precios B*	*Total a precios corrientes*	*Indice en base 2003*	*v.a/a*
2003	100	100	2.00	4.00	600	*100.0*	
2004	105	102	2.20	3.80	619	*103.0*	***3.0%***
2005	110	104	2.42	3.61	642	*106.1*	***3.0%***
2006	116	106	2.66	3.43	672	*109.3*	***3.0%***

	A precios constantes de:										
	2003			***2004***			***2005***			***Indice***	
Año	***Nivel***	***Indice***	***v.a/a***	***Nivel***	***Indice***	***v.a/a***	***Nivel***	***Indice***	***v.a/a***	***encadenado***	***v.a/a***
2003	600	100.0								100.0	
2004	618	103.0	***3.0%***	619	100.0					103.0	***3.0%***
2005				638	103.1	***3.1%***	642	100.0		106.2	***3.1%***
2006							663	103.2	***3.2%***	109.7	***3.2%***

En la tabla 2.1 se muestra un ejercicio simple en el que se construye un índice encadenado a partir de dos componentes y se compara con su equivalente en base fija[4]. En el ejemplo se observa como la actualización de precios tiene un efecto sobre el agregado, quedando en evidencia en la diferencia que se genera entre los índices construidos a partir de los mismos datos.

2.2. Contribución de los componentes al crecimiento de la serie anual

Uno de los cambios funcionales que genera la adopción de índices encadenados, en desmedro de los de base fija, es que la suma de los componentes para un periodo particular no resulta en el total de ese periodo (no aditividad transversal de las series). Esto se traduce en que no es posible utilizar la forma tradicional de cálculo de incidencias para encontrar la porción de la evolución del agregado que es atribuible a cada componente. A pesar de esto, en frecuencia anual al menos, es sencillo encontrar una fórmula que lo permite dado que el encadenamiento se realiza en dicha frecuencia.

Tabla 2.2: contribución sectorial anual para un índice encadenado por superposición anual

	Cantidades A	***Cantidades B***	***Precios A***	***Precios B***	***Total aprecios corrientes***	***Indice encadenado***	***v.a/a %***
2003	100	100	2.00	4.00	600	100.0	-
2004	105	102	2.20	3.80	619	103.0	**3.00**
2005	110	104	2.42	3.61	642	106.2	**3.12**
2006	116	106	2.66	3.43	672	109.7	**3.25**

	v.a/a cant. (%) A	***v.a/a cant. (%) B***	***ponderadores (v) A***	***ponderadores (v) B***	***Contribución (p.p.) A***	***Contribución (p.p.) B***
2003	-	-	0.33	0.67	-	-
2004	5.0	2.0	0.37	0.63	**1.67**	**1.33**
2005	5.0	2.0	0.42	0.58	**1.87**	**1.25**
2006	5.0	2.0	0.46	0.54	**2.08**	**1.17**

[3] La definición y construcción de índices encadenados está extensamente documentada en IMF (2001) y su aplicación particular a las Cuentas Nacionales de Chile puede encontrarse en Guerrero et. al. (2012).

[4] Las cantidades de A y B exhiben un crecimiento anual de 5 y 2%, respectivamente, mientras que los precios varían 10 y -5%.

La contribución al crecimiento en el año y de cada componente j, $c_{j,y}$, se define como la variación del componente, q_j, por su importancia relativa nominal en el año precedente, $v_{j,y-1}$, siendo la fórmula $c_{j,y} = v_{j,y-1} \cdot (q_{j,y} / q_{j,-1y} - 1)$. El cálculo de las contribuciones para el ejemplo de la tabla 2.1 se presenta en la tabla 2.2[5]. Como la expresión de la contribución anual deriva del proceso de encadenamiento, las contribuciones suman exactamente la variación del agregado a pesar de que los componentes en niveles no.

3. Descomposición de un agregado trimestral en función de sus componentes

Desde un punto de vista analítico, frecuentemente es necesario explicar la evolución de un agregado como el resultado del movimiento de sus componentes. En el contexto de las series encadenadas esta descomposición no es directa y en particular, para las series trimestrales, no es posible recurrir a la fórmula anual presentada en la sección anterior pues contempla la variación del año completo y no la evolución dentro de él. En lo que sigue se desarrolla la descomposición del agregado en términos de sus componentes para dejar en evidencia como la actualización de precios afecta la composición del agregado y luego se presenta una expresión para la contribución de cada componente al crecimiento del agregado.

3.1. Evolución de la composición de un agregado trimestral encadenado

La actualización anual de la estructura de precios en un índice encadenado significa que la evolución de la composición del agregado no solo depende del cambio en las cantidades de los componentes sino también de la de sus precios. Esta nueva dimensión es la que produce la pérdida de aditividad y que, por lo tanto, debe ser considerada para el cálculo de las contribuciones a modo de contrarrestar la influencia de los cambios de precios.

Como punto de partida, por construcción, las series valoradas a precios promedios del año anterior suman el total valorado a precios promedios del año anterior. Con esto, el agregado encadenado puede expresarse como la suma de los componentes deflactados por un término que incorpora los precios de los años previos[6].

Formalmente, esto se observa en la identidad (1) donde en cualquier periodo t el agregado valorado a precios promedios del año anterior se obtiene como resultado de multiplicar por el deflactor de precios implícito del año previo ($\overline{P}^{y-1}$), a su vez calculado como el promedio anual nominal del año previo ($\overline{N}^{y-1}$) dividido por el promedio anual encadenado del año previo ($\overline{Q}^{y-1}$):

$$Q_t^{\overline{AA}} = \overline{P}_t^{y-1} \cdot Q_t = \frac{\overline{N}_t^{y-1}}{\overline{Q}_t^{y-1}} \cdot Q_t \tag{1}$$

donde, Q_t : Serie agregada encadenada en el periodo t

$Q_t^{\overline{AA}}$: Serie agregada en el periodo t valorada a precios promedios del año anterior

Por otro lado, la identidad (2), presenta que las cantidades de los J componentes valorados a precios promedio del año anterior se obtienen de la misma forma anterior.

---

[5] Para expresar las contribuciones en puntos porcentuales se multiplica por cien. Ver Robjohns (2007).

[6] El análisis es el mismo si los componentes son cantidades físicas, índices de base fija o sub índices encadenados. Se hará referencia a ellos simplemente como componentes a diferencia de las variables valoradas a precios corrientes, referidas como nominales, y las valoradas a precios del año anterior.

$$q_{j,t}^{\overline{AA}} = \frac{\overline{n}_{j,t}^{y-1}}{\overline{q}_{j,t}^{y-1}} \cdot q_{j,t} \qquad j = 1 \cdots J \tag{2}$$

donde, q_j: Componente j

$\overline{q}_j^{y-1}$: Promedio anual del año precedente del componente j

$\overline{n}_j^{y-1}$: Promedio anual del año precedente del componente j nominal

A su vez, la identidad (3) presenta la condición de consistencia transversal en que un agregado es igual a la suma de sus componentes, todo valorado a precios del año anterior.

$$Q_t^{\overline{AA}} = \sum_{j=1}^{J} q_{j,t}^{\overline{AA}} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\overline{n}_{j,t}^{y-1}}{\overline{q}_{j,t}^{y-1}} \cdot q_{j,t} \tag{3}$$

Luego, al reagrupar las expresiones (1) y (3), el total encadenado, Q_t, puede expresarse en términos de los componentes encadenados tal como lo indica la expresión (4):

$$Q_t = \sum_{j=1}^{J} \left[\left(\frac{\overline{Q}_t^{y-1}}{\overline{N}_t^{y-1}} \right) \cdot \left(\frac{\overline{n}_{j,t}^{y-1}}{\overline{q}_{j,t}^{y-1}} \right) \cdot q_{j,t} \right] = \sum_{j=1}^{J} \left[\left(\frac{\overline{n}_{j,t}^{y-1}}{\overline{q}_{j,t}^{y-1}} \right) \Big/ \left(\frac{\overline{N}_t^{y-1}}{\overline{Q}_t^{y-1}} \right) \cdot q_{j,t} \right] = \sum_{j=1}^{J} \left[\left(\frac{\overline{p}_{j,t}^{y-1}}{\overline{P}_t^{y-1}} \right) \cdot q_{j,t} \right] \tag{4}$$

La expresión (4) indica que el nivel de un agregado equivale a la suma ponderada de los componentes y por lo tanto permite individualizar la porción del agregado que corresponde a cada componente, $e_{j,t}$, como:

$$e_{j,t} = \left(\frac{\overline{p}_{j,t}^{y-1}}{\overline{P}_t^{y-1}} \right) \cdot q_{j,t} \tag{5}$$

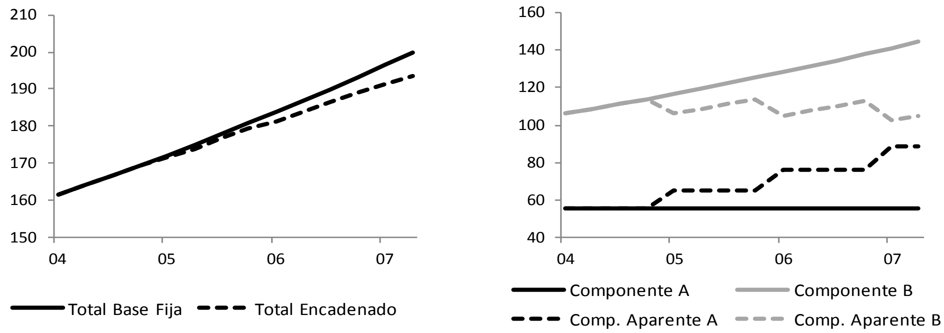
En la expresión (5) queda de manifiesto como el ponderador de cada componente, que permite que la suma ponderada del nivel de los componentes resulte en el nivel agregado, viene dado por la razón entre el deflactor implícito del componente y el del agregado y, por lo tanto, como cambios en estos influenciarán la composición del agregado.

La influencia de cambios en los deflactores implícitos queda en evidencia en el gráfico 3.1, donde se muestra la aplicación de la expresión (5) a un ejemplo en frecuencia trimestral. En este caso, para hacer evidentes las implicancias de la actualización de precios, por un lado, el componente A permanece invariante en términos de cantidad pero exhibe un aumento importante de precios y, por otro lado, el componente B crece en términos de cantidad pero mantiene su precio.

Las implicancias de la actualización de precios en el agregado se aprecian en que el total encadenado crece menos que el de base fija construido con los mismos datos. Esto tiene sentido, pues el componente que se vuelve progresivamente más importante en el agregado no varía en términos reales (componente A). Este menor crecimiento puede atribuirse inequívocamente a cada componente en base a la expresión (5), lo que se muestra en el gráfico con las series denominadas como componentes aparentes. Como se observa, con cada revisión de precios la importancia del componente A aumenta mientras que la de B disminuye en una magnitud similar.

Gráfico 3.1: Componentes encadenados y su contribución efectiva al agregado (cifras trimestrales)

Variación anual: $\Delta Q_A = 0\%, \quad \Delta Q_B = 10\%, \quad \Delta P_A = 30\%, \quad \Delta P_B = 0\%$



Este ejemplo deja de manifiesto que cada aumento que exhibe el componente aparente no es atribuible a la variación de las cantidades de A, sino que al cambio en su valor relativo. En particular, deja claro que la expresión (5) contiene un efecto nominal que, si bien se cancela en el agregado, puede ser significativo individualmente ante cambios importantes en la estructura de precios. De esto se entiende que la contribución real de cada componente no podría calcularse en base a la diferencia de la expresión (5) en un periodo y el previo, pues contempla el mencionado efecto nominal de la actualización de precios. La forma de remover ese efecto de la expresión (5) no es evidente pero en la sección siguiente se presenta una forma de hacerlo.

3.2. Contribución real por componente a la variación trimestral del agregado

A partir de la expresión (5) no es factible separar analíticamente la contribución real de los componentes del efecto nominal producto de la variación en el valor relativo de ellos. Sin embargo, de ser posible hacer la separación, la expresión para las contribuciones trimestrales debería cumplir, en primer lugar, con que la suma de ellas fuera exactamente igual al crecimiento del agregado y, en segundo lugar, que no contemple un efecto nominal. También se esperaría que la expresión fuera consistente con las contribuciones anuales calculadas a partir de la fórmula derivada directamente del proceso de encadenado y desarrollada en la sección 2.2.

a. Contribuciones al crecimiento trimestral cuando no hay cambios de precios

Un punto de partida, es examinar cuales serían las contribuciones de no haber cambios en los precios relativos. En este caso los ponderadores no exhibirían cambios y, por lo tanto, se esperaría que el agregado se viera afectado únicamente por la variación real de los componentes. En este caso, puede utilizarse la expresión (5) y reducirse de forma que las contribuciones a la variación trimestral pueden expresarse como:

$$c_{j,t} = \frac{e_{j,t} - e_{j,t-1}}{Q_{t-1}} = \left(\frac{\overline{p}_{j,t}^{\,y-1}}{\overline{P}_t^{\,y-1}} \right) \cdot \frac{\Delta q_{j,t}}{Q_{t-1}} \qquad \forall t \quad \text{donde} \quad \left(\frac{\overline{p}_{j,t}^{\,y-1}}{\overline{P}_t^{\,y-1}} \right) = \left(\frac{\overline{p}_{j,t-1}^{\,y-1}}{\overline{P}_{t-1}^{\,y-1}} \right) \tag{6}$$

Estas condiciones corresponden a las que prevalecen cuando se realiza el cálculo de contribuciones para la variación trimestral dentro de un mismo año. Ello debido a que los promedios del año anterior son los mismos para ambos periodos. Esto, sin embargo, no se cumple cuando se realiza el cálculo de la contribución para la variación trimestral del primer periodo de cada año, significando que la expresión (6) no es adecuada. De esto, se desprende que la totalidad de los efectos reales derivados del cambio en el valor relativo de los componentes se materializan en el primer periodo de cada año.

b. Contribuciones al crecimiento trimestral cuando hay cambios de precios

Una posible forma de enfrentar esta diferencia de los primeros periodos es simplemente ignorarla con la esperanza que la omisión no sea significativa y aceptando que para dicho periodo las contribuciones de los distintos componentes no sumen la variación del total[7]. En ciertas aplicaciones puede que esta estrategia simplificadora no genere problemas, sin embargo, no es posible garantizar que no lo haga. Es por esto que parece relevante considerar este factor adicional de ser posible separarlo del efecto nominal que interactúa en el agregado.

Basado en el hecho de que todas excepto la primera de las contribuciones trimestrales de un año pueden calcularse utilizando la expresión (6) y que el total de las contribuciones trimestrales de un año debieran ser consistentes con la contribución anual de ese año, es posible derivar una expresión para la contribución trimestral del primer periodo de manera residual[8]. El resultado de este proceso, expuesto en el anexo 2, es la siguiente fórmula general para la contribución a la variación trimestral del agregado:

$$c_{j,t} = \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left[\left(\frac{\overline{p}^{\,y-1}_{j,t-1}}{\overline{P}^{\,y-1}_{t-1}} \right) \cdot \left(q_{j,t} - q_{j,t-1} \right) + \left(\frac{\overline{p}^{\,y-1}_{j,t}}{\overline{P}^{\,y-1}_{t}} - \frac{\overline{p}^{\,y-1}_{j,t-1}}{\overline{P}^{\,y-1}_{t-1}} \right) \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}^{\,y-1}_{j,t} \right) \right] \qquad (7)$$

recordando que:

$c_{j,t}$	:	contribución de j a la variación trimestral del agregado en t
Q_{t-1}	:	agregado encadenado en $t-1$
$\overline{p}^{\,y-1}_{j,t-1}$	:	deflactor implícito de precios del componente j del año previo al trimestre $t-1$ (calculado como valor nominal sobre valor encadenado)
$\overline{P}^{\,y-1}_{t-1}$	:	deflactor implícito de precios del agregado del año previo al trimestre $t-1$
$q_{j,t}$	:	componente j en el trimestre t
$\overline{q}^{\,y-1}_{j,t}$	:	promedio trimestral del componente j en el año previo al trimestre t

La expresión (7) permite apreciar dos efectos claramente separables que determinan la contribución sectorial al crecimiento del agregado:

1- *El efecto de la variación de cantidades, y*
2- *El efecto real del cambio en la composición del agregado.*

El primer término contempla la contribución atribuible al sector si es que no hubiera cambios en los precios mientras que el segundo término combina el efecto puro del cambio en los precios con el derivado del hecho que tanto precios como cantidades cambian simultáneamente y, por tanto, representa "la corrección" que requiere el cálculo tradicional para reflejar apropiadamente el cambio en las ponderaciones del agregado[9].

---

[7] En Abad *et al.* (2007), plantean el uso de una aproximación que omite el denominado factor de corrección.

[8] INSEE (2007) calculan directamente el efecto nominal aproximando derivado del cambio en el valor relativo y lo remueven para encontrar la contribución trimestral. El resultado genera contribuciones que suman la variación de total, pero no son coherentes ciento por ciento con las contribuciones anuales respectivas. En el anexo 1 se presenta dicho enfoque en una reformulación de su propuesta original que calza con el marco de este documento y que permite comparar los resultados.

[9] En el anexo 3 se presentan ejemplos numéricos de la aplicación de la expresión (7).

c. Consistencia entre la contribución a la serie trimestral y la serie anual

Para ilustrar el punto de la consistencia entre las contribuciones a la variación trimestral del agregado y las contribuciones al crecimiento de la serie anual, la tabla 3.1 muestra un ejemplo. Este presenta un agregado que se construye a partir de dos componentes, A y B. El primero crece, en términos reales, a una tasa anual de 5% mientras que el segundo lo hace a una tasa de 10%. Sus precios crecen a un 30 y -5% anual, respectivamente. Las series se presentan en frecuencia anual y trimestral.

A partir de las series en frecuencia anual es fácil encontrar las contribuciones de los componentes al crecimiento de la serie agregada. Por otro lado, la expresión (7) permite encontrar las contribuciones a la variación trimestral. Con estas variaciones trimestrales y utilizando el hecho que en el año de referencia la suma de los componentes resulta en el total, es posible anclarse al primer trimestre del año de referencia y calcular las contribuciones al nivel agregado en base a las contribuciones a la variación[10]. Con esto, se obtienen series que transversalmente suman el agregado y que para fines prácticos exhiben las propiedades contables de los índices en base fija, aunque conceptualmente no son equivalentes. Estas series trimestrales de contribución al nivel pueden sumarse para obtener series en frecuencia anual. Al calcular las incidencias de éstas con la metodología tradicional de cálculo de base fija, se obtienen exactamente las mismas cifras que las calculadas a partir de los componentes encadenados en frecuencia anual y por lo tanto demuestran la coherencia entre los cálculos para ambas frecuencias.

Tabla 3.1: Consistencia anual de las contribuciones trimestrales al crecimiento y a los niveles

Crecimiento	A	B	Pa	Pb								
	5%	10%	30%	-5%								
					I		II					
	Series encadenadas				**Contribución anual (%)**		**Contribución trimestral**				**Incidencia anual (%)**	
							crecimiento		**nivel**			
	A	B	**Total**	*v.a/a %*	A	B	A	B	A	B	A	B
Anual												
2003	200	400	**600**						200	400		
2004	210	440	**650**	*8.34*	***1.66***	***6.67***			210	440	***1.66***	***6.67***
2005	220	484	**702**	*8.03*	***1.97***	***6.05***			223	480	***1.97***	***6.05***
2006	231	533	**757**	*7.70*	***2.30***	***5.40***			239	518	***2.30***	***5.40***
Trimestral												
Mar-03	49	97	**146**						49	97		
Jun-03	50	99	**149**	*2.01*	-	-	0.41	1.60	50	99		
Sep-03	50	101	**152**	*2.02*	-	-	0.41	1.61	50	101		
Dec-03	51	104	**155**	*2.02*	-	-	0.41	1.61	51	104		
Mar-04	52	106	**158**	*2.02*	-	-	0.40	1.62	52	106		
Jun-04	52	109	**161**	*2.02*	-	-	0.40	1.62	52	109		
Sep-04	53	111	**164**	*2.03*	-	-	0.40	1.63	53	111		
Dec-04	53	114	**167**	*2.03*	-	-	0.39	1.64	53	114		
Mar-05	54	117	**171**	*1.82*	-	-	0.61	1.22	54	116		
Jun-05	55	120	**174**	*1.95*	-	-	0.48	1.48	55	119		
Sep-05	55	123	**177**	*1.96*	-	-	0.47	1.48	56	121		
Dec-05	56	125	**181**	*1.96*	-	-	0.47	1.49	57	124		
Mar-06	57	129	**184**	*1.74*	-	-	0.69	1.04	58	126		
Jun-06	57	132	**187**	*1.88*	-	-	0.56	1.32	59	128		
Sep-06	58	135	**191**	*1.88*	-	-	0.55	1.33	60	131		
Dec-06	59	138	**194**	*1.88*	-	-	0.55	1.33	61	133		

[10] Las expresiones exactas se presentan al final del Anexo 2.

Cabe destacar que la similitud funcional entre las series de contribución al nivel y las de las series de componentes en un contexto de índices de base fija abren la posibilidad de utilizar las primeras para adaptar modelos y herramientas desarrolladas en el marco conceptual de base fija. Las series de contribución al nivel podrían ser particularmente útiles para modelos de proyección multivariados que dependen en su estructura de propiedades contables que las series encadenadas no exhiben. Es necesario enfatizar, sin embargo, que a la hora de evaluar los resultados es necesario estar consciente de que cada serie de contribuciones solo tiene sentido en el contexto de un agregado específico.

d. Efecto nominal del cambio en el valor relativo

El cambio en los valores nominales relativos de los componentes influye en la composición de un agregado encadenado en cada momento del tiempo. En base a la expresión (5) y las contribuciones es posible identificar cual es el efecto nominal sectorial en cualquier periodo. Este se expresa de la siguiente forma:

$$\text{ef.nominal}_{j,t} = \Delta e_{j,t} / Q_{t-1} - c_{j,t} = \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left(\frac{\bar{p}^{y-1}_{j,t}}{\bar{P}^{y-1}_{t}} - \frac{\bar{p}^{y-1}_{j,t-1}}{\bar{P}^{y-1}_{t-1}} \right) \cdot \bar{q}^{y-1}_{j,t}$$

Este efecto manifiesta los cambios en la importancia de cada sector en el agregado. Dado que la ganancia en importancia relativa de un sector necesariamente viene acompañada de la pérdida del resto, la suma de los efectos nominales para el total de componentes es cero.

e. Contribuciones al crecimiento anual de la serie trimestral

Como último punto, cabe notar que el método de derivación de la expresión (7) no es específico al cálculo de las contribuciones trimestrales y por lo tanto puede utilizarse para derivar la contribución al crecimiento respecto de cualquier periodo. En el caso particular de la contribución a la variación anual del agregado trimestral la solución toma una forma análoga a la de la expresión (7):

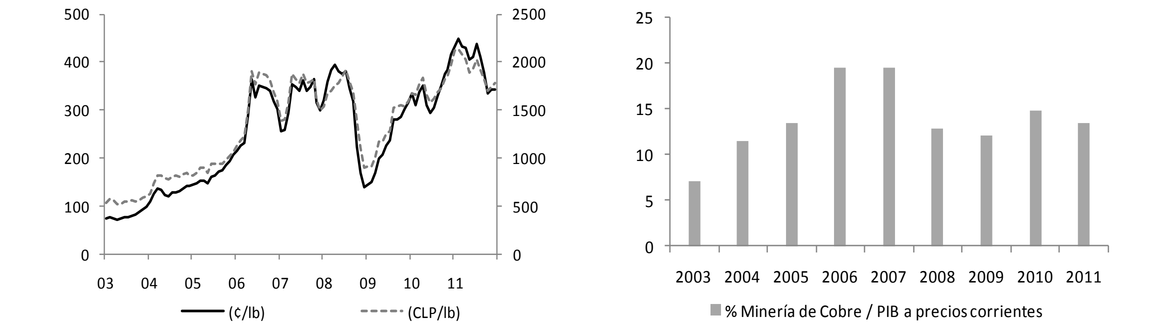
$$c^{yoy}_{j,t} = \frac{1}{Q_{t-4}} \cdot \left[\frac{\bar{p}^{y-1}_{j,t-4}}{\bar{P}^{y-1}_{t-4}} \cdot \left(q_{j,t} - q_{j,t-4} \right) + \left(\frac{\bar{p}^{y-1}_{j,t}}{\bar{P}^{y-1}_{t}} - \frac{\bar{p}^{y-1}_{j,t-4}}{\bar{P}^{y-1}_{t-4}} \right) \cdot \left(q_{j,t} - \bar{q}^{y-1}_{j,t} \right) \right] \tag{8}$$

4. Descomposición de la contribución de Minería de Cobre al PIB

Para Chile, la actualización periódica de los precios de los componentes del PIB levanta una interrogante en lo que se refiere a la evolución de la composición del PIB. Esto porque el sector de la Minería de Cobre, que representa una porción importante de este, ha experimentado fuertes fluctuaciones en la última década. En el panel izquierdo del gráfico 4.1 se presenta la evolución del precio mensual de cobre en la bolsa de Londres, tanto en centavos de dólar como en pesos, y en el derecho la contribución del sector Minería de Cobre en términos nominales. Se aprecia como el precio ha experimentado fuertes variaciones y como a simple vista esto se habría traspasado al PIB nominal, donde en 2006 y 2007 pasó a representar un 20% del PIB.

Dada la particularidad e importancia de esta industria se torna interesante analizar la evolución de su importancia en el PIB separando entre lo que es la contribución real y lo que es el efecto nominal. Para esto se utilizan los datos trimestrales de PIB por clase de actividad económica para el periodo 2003-2011, publicados en la Base de Datos Estadísticos del BCCh.

Gráfico 4.1: Precio del cobre mensual y participación de Minería de Cobre en el PIB nominal

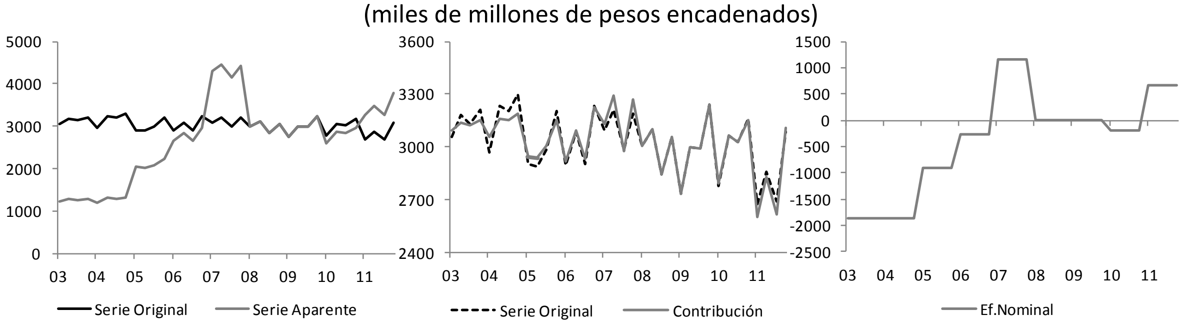


Fuente: Cochilco y Banco Central de Chile

En el primer gráfico de 4.2 se observa como la serie aparente de Minería de Cobre, construida a partir de la expresión (5), exhibe un dinamismo significativamente mayor al de la serie original y, en particular, refleja cierta semejanza con la evolución de la participación nominal del gráfico 4.1. Como se esperaría, tomando en consideración la evolución del precio, al separar los elementos que inciden en la composición del agregado, presentados en el segundo y tercer gráfico de 4.2, se observa que el mayor dinamismo proviene fundamentalmente del efecto nominal producto del cambio en el valor relativo de los componentes del PIB. Con esto, quedan en evidencia los cambios significativos que la estructura de precios de la economía ha experimentado en la historia reciente y por lo tanto, la importancia de la implementación un método que permite incorporarlos de manera oportuna.

Gráfico 4.2: PIB de Minería de Cobre y su contribución al PIB total

(miles de millones de pesos encadenados)



5. Conclusión

El uso de series encadenadas utilizando una base de precios móvil reduce significativamente el problema de la obsolescencia en la estructura de precios. Sin embargo, la actualización periódica de la estructura de precios relativos hace menos directo el análisis y conlleva considerar efectos que no se manifestaban en la metodología de base fija.

En este documento se desarrolla un marco para entender, desde una perspectiva sectorial, los fenómenos involucrados en la evolución de un agregado encadenado por superposición anual. En particular, se presenta una forma exacta para calcular la contribución sectorial a la variación del PIB trimestral que a su vez es coherente con su contrapartida anual. Además, esta expresión, sólo requiere de las series de los componentes reales en frecuencia trimestral y las nominales en frecuencia anual. En el proceso se identifica cada uno de los tres efectos que interactúan en el agregado, esto es: el efecto de la variación de las cantidades de los componentes, el efecto real del cambio en la composición del agregado y el efecto nominal del cambio en el valor relativo de los componentes.

Un potencial uso adicional para las contribuciones sectoriales, más allá de apoyar a la explicación de la evolución del agregado, es la generación de series de contribuciones a los niveles consistentes con el agregado y con propiedades similares a los componentes de un índice de base fija. Este tipo de series podría facilitar la adaptación y uso de herramientas que basan su funcionamiento en la aditividad de los componentes. Por ejemplo, es probable que series de contribución en niveles pudieran ser utilizadas directamente, sujeto a los resguardos apropiados, en modelos de equilibrio general que requieren de identidades contables que se cumplen en el marco de indicadores de base fija y no en el de indicadores encadenados. De cualquier forma, la identificación de los distintos factores que influyen en la evolución del PIB debiera servir para facilitar el análisis del panorama económico.

Referencias

Abad, A., A. Cuevas y E.Quilis (2007) "Chain-Linked Volume Indices: A Practical Guide", Bulletin of E.U. and US Inflation and Macroeconomic Analysis nº 157 (2007). Universidad Carlos III de Madrid, Instituto Flores de Lemus de Estudios Avanzados

INSEE (2007), "Calcul des contributions en volumes chaînés", NOTE aux utilisateurs N°47, Direction des Etudes et Synthèses Economiques, Institut National de la Statistique et des Etùdes Économiques.

Banque Nationale de Belgique (2010), "Issues encountered with quarterly volume balances measured in chain-linked euros: levels and contributions to growth - a new approach for the quarterly national accounts".

Guerrero, S., R. Luengo, P. Pozo y S. Rébora (2012), "Nuevas series de Cuentas Nacionales encadenadas: Métodos y fuentes de estimación", Estudios económicos estadísticos N.° 90 - Marzo 2012, Banco Central de Chile

IMF (2001), "Quarterly National Accounts Manual - Concepts, Data Sources, and Compilation", A.M. Bloem, R.J. Dippelsman and N.O. Maehle, International Monetary Fund.

OCDE (2006a), "Understanding National Accounts", F. Lequiller and D. Blades, Organisation for Economic Co-operation and Development.

OCDE (2006b), "Survey of OCDE member country practices in deriving contributions to GDP volume growth and quarterly changes in inventories", Organisation for Economic Co-operation and Development.

OCDE (2013), "Methodological notes referring to the OCDE press release: Contributions to GDP growth", Organisation for Economic Co-operation and Development.

Robjohns, J. (2007), "Methods explained: Contributions to growth rates under annual chain-linking," Economic and Labour Market Review, Palgrave Macmillan, vol. 1(6), pages 53-56, June.

SCN (1993), "System of National Accounts", Statistical Commission of the United Nations. Commission of the European Communities – Eurostat, International Monetary Fund, Organisation for Economic Co-operation and Development, United Nations and World Bank

Anexo 1: Descomposición de la contribución de INSEE (2007) en el marco de este documento

El INSEE (2007)[11] plantea la contribución de cada componente j al crecimiento del agregado como:

$$
\begin{aligned}
c_{j,t}^{\text{INSEE}} &= \left(\frac{\bar{n}_{j,t}^{y-1}}{\bar{q}_{j,t}^{y-1}} \cdot \frac{\bar{Q}_{t}^{y-1}}{\bar{N}_{t}^{y-1}} \right) \cdot \frac{\Delta q_{j,t}}{Q_{t-1}} + \left(\frac{q_{j,t-1}}{Q_{t-1}} - \frac{\bar{q}_{j,t}^{y-1}}{\bar{Q}_{j,t}^{y-1}} \right) \cdot \left(\frac{\bar{n}_{j,t}^{y-1}}{\bar{q}_{j,t}^{y-1}} \cdot \frac{\bar{Q}_{t}^{y-1}}{\bar{N}_{t}^{y-1}} - \frac{\bar{n}_{j,t-1}^{y-1}}{\bar{q}_{j,t-1}^{y-1}} \cdot \frac{\bar{Q}_{t-1}^{y-1}}{\bar{N}_{t-1}^{y-1}} \right) \\
&= \bar{w}_{j,t}^{y-1} \cdot \frac{\Delta q_{j,t}}{Q_{t-1}} + \left(\frac{q_{j,t-1}}{Q_{t-1}} - \frac{\bar{q}_{j,t}^{y-1}}{\bar{Q}_{j,t}^{y-1}} \right) \cdot \left(\bar{w}_{j,t}^{y-1} - \bar{w}_{j,t-1}^{y-1} \right)
\end{aligned}
$$

luego, el crecimiento del agregado puede expresarse como:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta Q_t}{Q_{t-1}} &= \sum_{j=1}^{J} \left[\bar{w}_{j,t}^{y-1} \cdot \frac{\Delta q_{j,t}}{Q_{t-1}} + \left(\frac{q_{j,t-1}}{Q_{t-1}} - \frac{\bar{q}_{j,t}^{y-1}}{\bar{Q}_{j,t}^{y-1}} \right) \cdot \left(\bar{w}_{j,t}^{y-1} - \bar{w}_{j,t-1}^{y-1} \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{J} \left[\bar{w}_{j,t}^{y-1} \cdot \frac{\Delta q_{j,t}}{Q_{t-1}} + \frac{q_{j,t-1}}{Q_{t-1}} \cdot \left(\bar{w}_{j,t}^{y-1} - \bar{w}_{j,t-1}^{y-1} \right) \right] - \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{\bar{q}_{j,t}^{y-1}}{\bar{Q}_{j,t}^{y-1}} \cdot \left(\bar{w}_{j,t}^{y-1} - \bar{w}_{j,t-1}^{y-1} \right) \right]
\end{aligned}
$$

el primer término puede manipularse de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{J} \left[\bar{w}_{j,t}^{y-1} \cdot \frac{\Delta q_{j,t}}{Q_{j,t-1}} + \frac{q_{j,t-1}}{Q_{t-1}} \cdot \left(\bar{w}_{j,t}^{y-1} - \bar{w}_{j,t-1}^{y-1} \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{J} \left[\bar{w}_{j,t}^{y-1} \cdot \frac{q_{j,t}}{Q_{t-1}} - \bar{w}_{j,t}^{y-1} \cdot \frac{q_{j,t-1}}{Q_{t-1}} + \bar{w}_{j,t}^{y-1} \cdot \frac{q_{j,t-1}}{Q_{t-1}} - \bar{w}_{j,t-1}^{y-1} \cdot \frac{q_{j,t-1}}{Q_{t-1}} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{J} \left[\bar{w}_{j,t}^{y-1} \cdot \frac{q_{j,t}}{Q_{t-1}} - \bar{w}_{j,t-1}^{y-1} \cdot \frac{q_{j,t-1}}{Q_{t-1}} \right] \\
&= \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \sum_{j=1}^{J} \left[\bar{w}_{j,t}^{y-1} \cdot q_{j,t} - \bar{w}_{j,t-1}^{y-1} \cdot q_{j,t-1} \right]
\end{aligned}
$$

con esto,

$$
\Delta Q_t = \sum_{j=1}^{J} \left[\bar{w}_{j,t}^{y-1} \cdot q_{j,t} - \bar{w}_{j,t-1}^{y-1} \cdot q_{j,t-1} \right] - Q_{t-1} \cdot \sum_{j=1}^{J} \left[\frac{\bar{q}_{j,t}^{y-1}}{\bar{Q}_{j,t}^{y-1}} \cdot \left(\bar{w}_{j,t}^{y-1} - \bar{w}_{j,t-1}^{y-1} \right) \right]
$$

y por lo tanto la contribución de cada componente puede expresarse como:

$$
c_{j,t}^{\text{INSEE}} = \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left(\frac{\bar{p}_{j,t}^{y-1}}{\bar{P}_{t}^{y-1}} \cdot q_{j,t} - \frac{\bar{p}_{j,t-1}^{y-1}}{\bar{P}_{t-1}^{y-1}} \cdot q_{j,t-1} \right) - \frac{\bar{q}_{j,t}^{y-1}}{\bar{Q}_{j,t}^{y-1}} \cdot \left(\frac{\bar{p}_{j,t}^{y-1}}{\bar{P}_{t}^{y-1}} - \frac{\bar{p}_{j,t-1}^{y-1}}{\bar{P}_{t-1}^{y-1}} \right)
$$

[11] Versión resumida en inglés en Banque Nationale de Belgique (2010)

Anexo 2: Cálculo de la contribución exacta de alta frecuencia a partir de la contribución anual en un contexto de índices encadenados por superposición anual.

En lo que sigue, se deriva paso a paso la fórmula general para la contribución de los componentes a la variación trimestral del PIB en un contexto en que éste se genera utilizando la metodología de encadenamiento por superposición anual. Para esto, en primera instancia se derivan ciertos resultados que emanan del encadenamiento en frecuencia anual. Luego se utilizan estos en combinación con resultados derivados de las propiedades de las series en frecuencia trimestral para llegar a la expresión (7) de este documento.

Se tiene que la contribución de cada componente j al crecimiento de la serie anual agregada el año y es:

$$C_{j,y} = \frac{n_j^{y-1}}{N^{y-1}} \cdot \left(\frac{q_j^y}{q_j^{y-1}} - 1 \right) \cdot 100$$

donde, n_j^{y-1} = valor nominal del componente j en el año y *-1*

N^{y-1} = valor nominal del agregado en el año y *-1*

q_j^y = valor encadenado del componente j en el año y

Luego, la contribución al nivel del agregado en el año y es:

$$K_j^y = K_j^{y-1} + \frac{n_j^{y-1}}{N^{y-1}} \cdot \left(\frac{q_j^y}{q_j^{y-1}} - 1 \right) \cdot Q^{y-1} = K_j^{y-1} + \frac{\overline{n}_j^{y-1}}{\overline{N}^{y-1}} \cdot \left(\frac{\overline{q}_j^{y}}{\overline{q}_j^{y-1}} - 1 \right) \cdot Q^{y-1} \qquad \text{(A.1)}$$

donde, Q^{y-1} = valor encadenado del agregado en el año y *-1*

$\overline{x}^y$ = promedio-f de x en el año y, donde f es la frecuencia de la serie (trimestral f=4)

La expresión anterior muestra la contribución al nivel en el año y como la contribución al nivel en el año y*-1* más la contribución al cambio en el agregado en y. Luego, sustituyendo la contribución al nivel en el año y*-1* con la misma fórmula rezagada un periodo, es posible expresar la contribución al nivel en el año y como la contribución al nivel en el año y*-2* más la contribución al cambio en el agregado en y*-1* más la contribución al cambio en el agregado en y.

Realizando este proceso reiteradamente es posible expresar la contribución al nivel en el año y como la contribución al nivel en cualquier año previo más la suma de las contribuciones a los cambios desde ese periodo hasta y. Luego, dado que en el año de referencia, y_0, la contribución al nivel agregado del componente j es igual al componente j, dado que $N^{y_0} = Q^{y_0}$ y $n_j^{y_0} = q_j^{y_0}$, la contribución al nivel en el año y puede expresarse como el componente j en el año de referencia, $q_j^{y_0}$, más la suma de las contribuciones a los cambios desde ese periodo hasta y.

$$K_j^y = q_j^{y^0} + \sum_{h=y^0+1}^{y} \left[\frac{\overline{n}_j^{h-1}}{\overline{N}^{h-1}} \cdot \left(\frac{\overline{q}_j^{h}}{\overline{q}_j^{h-1}} - 1 \right) \cdot Q^{h-1} \right] \qquad \text{(A.2)}$$

Por otro lado, las contribuciones trimestrales de dicha serie (para series mensuales f =12) solo estarán sujetas a actualización de precios las primeras observaciones de cada año. Luego, en base a la expresión (5) del documento, se tiene que para las f-1 observaciones restantes, que no exhiben actualización de precios, la contribución al crecimiento en t de cada componente j al agregado es:

$$\begin{aligned} c_{j,t} &= \Delta e_{j,t} \big/ Q_{t-1} = \left(\frac{\overline{p}_{j,t}^{\,y-1}}{\overline{P}_t^{\,y-1}} \cdot q_{j,t} - \frac{\overline{p}_{j,t-1}^{\,y-1}}{\overline{P}_{t-1}^{\,y-1}} \cdot q_{j,t-1} \right) \Big/ Q_{t-1} \\ &= \frac{\overline{p}_{j,t-1}^{\,y-1}}{\overline{P}_{t-1}^{\,y-1}} \cdot \frac{\Delta q_{j,t}}{Q_{t-1}} = \overline{w}_{t-1}^{\,y-1} \cdot \frac{\Delta q_{j,t}}{Q_{t-1}} \qquad \forall t \quad \text{donde} \quad \overline{w}_t^{\,y-1} = \overline{w}_{t-1}^{\,y-1} \end{aligned} \tag{A.3}$$

significando que la contribución al nivel del agregado trimestral en el periodo t es:

$$k_{j,t} = k_{j,t-1} + \overline{w}_{j,t-1}^{\,y-1} \cdot \Delta q_{j,t} \qquad \forall t \quad \text{donde} \quad \overline{w}_{j,t}^{\,y-1} = \overline{w}_{j,t-1}^{\,y-1} \tag{A.4}$$

Luego, para que la descomposición sea consistente, la contribución anual al nivel agregado de cada componente en cualquier año debería ser igual a la suma de las contribuciones trimestrales al nivel agregado de dicho componente. Esto es:

$$K_j^y = \sum_{s=1}^{f} k_{j,s}^y$$

Esta identidad puede expandirse utilizando (A.4) para sustituir recursivamente las contribuciones para dejar la expresión en términos de la contribución del primer periodo y las subsecuentes variaciones del componente.

$$\begin{aligned} K_j^y &= \sum_{s=1}^{f} k_{j,s}^y \\ &= k_{j,1}^y + \quad k_{j,2}^y \quad + \sum_{s=3}^{f} k_{j,s}^y \\ &= k_{j,1}^y + \quad k_{j,1}^y + \overline{w}_{j,1}^{\,y-1} \cdot \Delta q_{j,2} \quad + \sum_{s=3}^{f} k_{j,s}^y \\ &= \qquad \vdots \\ &= f \cdot k_{j,1}^y \quad + (f-1) \cdot \overline{w}_{j,1}^{\,y-1} \cdot \Delta q_{j,2} + \quad \cdots \quad + \overline{w}_{j,f-1}^{\,y-1} \cdot \Delta q_{j,f} \end{aligned}$$

Dentro de un mismo año se tiene que $\overline{w}_{j,1}^{\,y-1} = \overline{w}_{j,2}^{\,y-1} = \ldots = \overline{w}_{j,f-1}^{\,y-1} = \overline{w}_j^{\,y-1}$, por lo que

$$\begin{aligned} K_j^y &= f \cdot k_{j,1}^y \quad + (f-1) \cdot \overline{w}_{j,1}^{\,y-1} \cdot \Delta q_{j,2}^y + \quad \cdots \quad + \overline{w}_{j,f-1}^{\,y-1} \cdot \Delta q_{j,f}^y \\ K_j^y - f \cdot k_{j,1}^y &= \overline{w}_j^{\,y-1} \cdot \left[(f-1) \cdot \Delta q_{j,2}^y + \quad \cdots \quad + \Delta q_{j,f}^y \right] \\ &= \overline{w}_j^{\,y-1} \cdot \left[(f-1) \cdot q_{j,2}^y - (f-1) \cdot q_{j,1}^y + \quad (f-2) \cdot q_{j,3}^y - (f-2) \cdot q_{j,2}^y + \quad \cdots \quad + q_{j,f}^y - q_{j,f-1}^y \right] \\ &= \overline{w}_j^{\,y-1} \cdot \left[-(f-1) \cdot q_{j,1}^y \quad + (f-1) \cdot q_{j,2}^y - (f-2) \cdot q_{j,2}^y + \quad \cdots \quad + 2 \cdot q_{j,f-1}^y - q_{j,f-1}^y \quad + q_{j,f}^y \right] \\ &= \overline{w}_j^{\,y-1} \cdot \left[-f \cdot q_{j,1}^y + q_{j,1}^y \quad + q_{j,2}^y + \quad \cdots \quad + q_{j,f-1}^y \quad + q_{j,f}^y \right] \\ &= \overline{w}_j^{\,y-1} \cdot \left[\sum_{z=1}^{f} \left[q_{j,z}^y \right] \quad - f \cdot q_{j,1}^y \right] \\ &= \overline{w}_j^{\,y-1} \cdot f \cdot \left[\overline{q}_j^{\,y} \quad - \quad q_{j,1}^y \right] \end{aligned}$$

donde $\overline{q}_j^{\,y}$ es el promedio-f de la serie encadenada j en el año y (no en el año previo).

Una vez cerrado el año, la única incógnita que subsiste es la contribución al nivel del primer periodo y por lo tanto la expresión (A.2) puede usarse para seguir desarrollando la expresión:

$$
\begin{aligned}
K_j^y - f\cdot k_{j,1}^y &= \overline{w}_j^{y-1}\cdot f\cdot\left[\overline{q}_j^{y} - q_{j,1}^y\right]\\
k_{j,1}^y &= \frac{1}{f}\cdot K_j^y + \overline{w}_j^{y-1}\cdot\left(q_{j,1}^y - \overline{q}_j^{y}\right)\\
&= \frac{1}{f}\cdot\left[K_j^{y-1} + \frac{\overline{n}_j^{y-1}}{\overline{N}^{y-1}}\cdot\left(\frac{\overline{q}_j^{y}}{\overline{q}_j^{y-1}} - 1\right)\cdot Q^{y-1}\right] + \overline{w}_j^{y-1}\cdot\left(q_{j,1}^y - \overline{q}_j^{y}\right)\\
&= \frac{1}{f}\cdot K_j^{y-1} + \frac{\overline{n}_j^{y-1}}{\overline{N}^{y-1}}\cdot\left(\frac{\overline{q}_j^{y}}{\overline{q}_j^{y-1}} - 1\right)\cdot\frac{Q^{y-1}}{f} + \overline{w}_j^{y-1}\cdot\left(q_{j,1}^y - \overline{q}_j^{y}\right)\\
&= \overline{K}_j^{y-1} + \frac{\overline{n}_j^{y-1}}{\overline{N}^{y-1}}\cdot\frac{1}{\overline{q}_j^{y-1}}\left(\overline{q}_j^{y} - \overline{q}_j^{y-1}\right)\cdot\overline{Q}^{y-1} + \overline{w}_j^{y-1}\cdot\left(q_{j,1}^y - \overline{q}_j^{y}\right)\\
&= \overline{K}_j^{y-1} + \overline{w}_j^{y-1}\cdot\left(\overline{q}_j^{y} - \overline{q}_j^{y-1} + q_{j,1}^y - \overline{q}_j^{y}\right)
\end{aligned}
$$

lo que reduce la contribución al nivel agregado del primer periodo del año y a:

$$k_{j,1}^y = \overline{K}_j^{y-1} + \overline{w}_j^{y-1}\cdot\left(q_{j,1}^y - \overline{q}_j^{y-1}\right)$$

Dado que dicha expresión se deriva para el primer periodo, se puede recurrir a (A.4) para encontrar expresiones similares para el resto de los periodos. Luego, para el segundo periodo de un año cualquiera:

$$
\begin{aligned}
k_{j,2}^y &= k_{j,1}^y + \overline{w}_j^{y-1}\cdot\Delta q_{j,2}^y\\
&= \overline{K}_j^{y-1} + \overline{w}_j^{y-1}\cdot\left(q_{j,1}^y - \overline{q}_j^{y-1}\right) + \overline{w}_j^{y-1}\cdot\left(q_{j,2}^y - q_{j,1}^y\right)\\
&= \overline{K}_j^{y-1} - \overline{w}_j^{y-1}\cdot\overline{q}_j^{y-1} + \overline{w}_j^{y-1}\cdot q_{j,2}^y\\
&= \overline{K}_j^{y-1} + \overline{w}_j^{y-1}\cdot\left(q_{j,2}^y - \overline{q}_j^{y-1}\right)
\end{aligned}
$$

La expresión a la que se llega es equivalente a la derivada para el primer periodo por lo que se deduce que la contribución al nivel agregado en el periodo t puede expresarse, sin perder generalidad, como:

$$k_{j,t} = \overline{K}_{j,t}^{y-1} + \overline{w}_{j,t}^{y-1}\cdot\left(q_{j,t} - \overline{q}_{j,t}^{y-1}\right) \tag{A.5}$$

La utilización de la contribución anual, permite que la expresión solo contemple términos de periodos corrientes o pasados, luego no es necesario que el año esté cerrado para calcular la contribución al crecimiento trimestral del periodo. Luego, se puede utilizar (A.5) para formular la contribución de cada componente j al crecimiento trimestral del agregado en t como:

$$
\begin{aligned}
c_{j,t} &= \frac{1}{Q_{t-1}}\cdot\left(k_{j,t} - k_{j,t-1}\right)\\
&= \frac{1}{Q_{t-1}}\cdot\left[\overline{K}_{j,t}^{y-1} + \overline{w}_{j,t}^{y-1}\cdot\left(q_{j,t} - \overline{q}_{j,t}^{y-1}\right) - \overline{K}_{j,t-1}^{y-1} - \overline{w}_{j,t-1}^{y-1}\cdot\left(q_{j,t-1} - \overline{q}_{j,t-1}^{y-1}\right)\right]\\
&= \frac{1}{Q_{t-1}}\cdot\left[\overline{K}_{j,t}^{y-1} - \overline{K}_{j,t-1}^{y-1} + \overline{w}_{j,t}^{y-1}\cdot\left(q_{j,t} - \overline{q}_{j,t}^{y-1}\right) - \overline{w}_{j,t-1}^{y-1}\cdot\left(q_{j,t-1} - \overline{q}_{j,t-1}^{y-1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

En los periodos distintos al primero de cada año, se tendrá que la expresión previa colapsa a la (A.3) por lo que solo es relevante concentrarse en los primeros periodos de cada año. En estos, el año previo de referencia no es el mismo y por lo tanto $\overline{K}^{y-1}_{j,t} \neq \overline{K}^{y-1}_{j,t-1}$, por lo que (A.1) puede reescribirse en frecuencia trimestral de la siguiente forma:

$$\overline{K}^{y}_{j} = \overline{K}^{y-1}_{j} + \frac{\overline{n}^{y-1}_{j}}{\overline{N}^{y-1}} \cdot \left(\frac{\overline{q}^{y}_{j}}{\overline{q}^{y-1}_{j}} - 1 \right) \cdot Q^{y-1} \qquad \Rightarrow \quad \overline{K}^{y-1}_{j,t} = \overline{K}^{y-1}_{j,t-1} + \left(\frac{\overline{n}^{y-1}_{j,t-1}}{\overline{N}^{y-1}_{t-1}} \right) \cdot \left[\left(\frac{\overline{q}^{y}_{j,t-1}}{\overline{q}^{y-1}_{j,t-1}} \right) - 1 \right] \cdot Q^{y-1}_{t-1}$$

luego, cuando *t* es el primer periodo del año, se tiene que $\overline{q}^{y}_{j,t-1} = \overline{q}^{y-1}_{j,t}$ y por lo tanto;

$$\overline{K}^{y-1}_{j,t} \quad = \quad \overline{K}^{y-1}_{j,t-1} + \left(\frac{\overline{n}^{y-1}_{j,t-1}}{\overline{N}^{y-1}_{t-1}} \right) \cdot \left[\left(\frac{\overline{q}^{y-1}_{j,t}}{\overline{q}^{y-1}_{j,t-1}} \right) - 1 \right] \cdot Q^{y-1}_{t-1} \tag{A.6}$$

esto se puede reemplazar en el primer término de $c_{j,t}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f}\left(\overline{K}^{y-1}_{j,t} - \overline{K}^{y-1}_{j,t-1} \right) &= \frac{1}{f} \cdot \left(\overline{K}^{y-1}_{j,t-1} + \frac{\overline{n}^{y-1}_{j,t-1}}{\overline{N}^{y-1}_{t-1}} \cdot \left[\frac{\overline{q}^{y-1}_{j,t}}{\overline{q}^{y-1}_{j,t-1}} - 1 \right] \cdot Q^{y-1}_{t-1} - \overline{K}^{y-1}_{j,t-1} \right) \\
&= \frac{Q^{y-1}_{t-1}}{f} \cdot \left(\frac{\overline{n}^{y-1}_{j,t-1}}{\overline{N}^{y-1}_{t-1}} \cdot \left[\frac{\overline{q}^{y-1}_{j,t}}{\overline{q}^{y-1}_{j,t-1}} - 1 \right] \right) \\
&= \overline{Q}^{y-1}_{t-1} \cdot \left(\frac{\overline{n}^{y-1}_{j,t-1}}{\overline{N}^{y-1}_{t-1}} \cdot \frac{\overline{q}^{y-1}_{j,t}}{\overline{q}^{y-1}_{j,t-1}} - \frac{\overline{n}^{y-1}_{j,t-1}}{\overline{N}^{y-1}_{t-1}} \right) \\
&= \left(\frac{\overline{n}^{y-1}_{j,t-1}}{\overline{N}^{y-1}_{t-1}} \cdot \frac{\overline{Q}^{y-1}_{t-1}}{\overline{q}^{y-1}_{j,t-1}} \cdot \overline{q}^{y-1}_{j,t} \quad - \quad \frac{\overline{n}^{y-1}_{j,t-1}}{\overline{N}^{y-1}_{t-1}} \cdot \frac{\overline{Q}^{y-1}_{t-1}}{\overline{q}^{y-1}_{j,t-1}} \cdot \overline{q}^{y-1}_{j,t-1} \right) \\
&= \overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot \left(\overline{q}^{y-1}_{j,t} - \overline{q}^{y-1}_{j,t-1} \right)
\end{aligned}$$

Luego, la expresión para $c_{j,t}$ puede escribirse como:

$$c_{j,t} \quad = \quad \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left[\overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot \left(\overline{q}^{y-1}_{j,t} - \overline{q}^{y-1}_{j,t-1} \right) + \overline{w}^{y-1}_{j,t} \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}^{y-1}_{j,t} \right) - \overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot \left(q_{j,t-1} - \overline{q}^{y-1}_{j,t-1} \right) \right] \tag{A.7}$$

Luego (A.7) puede reordenarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
c_{j,t} &= \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left[\overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot \left(\overline{q}^{y-1}_{j,t} - \overline{q}^{y-1}_{j,t-1} \right) + \overline{w}^{y-1}_{j,t} \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}^{y-1}_{j,t} \right) - \overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot \left(q_{j,t-1} - \overline{q}^{y-1}_{j,t-1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left[\overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot \overline{q}^{y-1}_{j,t} + \overline{w}^{y-1}_{j,t} \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}^{y-1}_{j,t} \right) - \overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot q_{j,t-1} \right] \\
&= \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left[\overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot \overline{q}^{y-1}_{j,t} + \overline{w}^{y-1}_{j,t} \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}^{y-1}_{j,t} \right) - \overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot q_{j,t-1} + \overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot q_{j,t} - \overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot q_{j,t} \right] \\
&= \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left[\overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot \left(q_{j,t} - q_{j,t-1} \right) + \overline{w}^{y-1}_{j,t} \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}^{y-1}_{j,t} \right) - \overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}^{y-1}_{j,t} \right) \right] \\
&= \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left[\overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \cdot \left(q_{j,t} - q_{j,t-1} \right) + \left(\overline{w}^{y-1}_{j,t} - \overline{w}^{y-1}_{j,t-1} \right) \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}^{y-1}_{j,t} \right) \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, para el propósito de su aplicación, la expresión se escribe en términos de las series originales y los deflactores implícitos de precios:

$$c_{j,t} = \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left[\left(\frac{\overline{p}_{j,t-1}^{y-1}}{\overline{P}_{t-1}^{y-1}} \right) \cdot \left(q_{j,t} - q_{j,t-1} \right) + \left(\frac{\overline{p}_{j,t}^{y-1}}{\overline{P}_{t}^{y-1}} - \frac{\overline{p}_{j,t-1}^{y-1}}{\overline{P}_{t-1}^{y-1}} \right) \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}_{j,t}^{y-1} \right) \right] \qquad \text{(A.8)}$$

recordando que:

$c_{j,t}$: contribución de j a la variación trimestral del agregado en t

Q_{t-1} : agregado encadenado en $t-1$

$\overline{p}_{j,t-1}^{y-1}$: deflactor implícito de precios del componente j del año previo al trimestre $t-1$ (calculado como valor nominal sobre valor encadenado)

$\overline{P}_{t-1}^{y-1}$: deflactor implícito de precios del agregado del año previo al trimestre $t-1$

$q_{j,t}$: componente j en el trimestre t

$\overline{q}_{j,t}^{y-1}$: promedio trimestral del componente j en el año previo al trimestre t

<u>Formulas útiles que se derivan del ejercicio anterior:</u>

Empalmes de series encadenadas:

En el caso de series encadenadas de frecuencia trimestral empalmadas en base a la variación de la serie en frecuencia anual y en que el año de referencia se encuentra en alguna parte intermedia de la serie (cualquier periodo distinto del primero) la expresión (A.8) no será correcta para el primer trimestre del año de referencia. Esto, porque, contradiciendo los supuestos de la derivación de (A.8), el año de referencia está a precios promedio de ese año y no del año previo por lo que la expresión (A.6) no es válida. Sin embargo, la expresión (A.5) sigue siendo consistente por lo que es posible recuperar la contribución a la variación trimestral de las contribuciones anuales con:

$$c_{j,t} = \frac{1}{Q_{t-1}} \cdot \left[\overline{K}_{j,t}^{y-1} - \overline{K}_{j,t-1}^{y-1} + \left(\frac{\overline{p}_{j,t}^{y-1}}{\overline{P}_{t}^{y-1}} \right) \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}_{j,t}^{y-1} \right) - \left(\frac{\overline{p}_{j,t-1}^{y-1}}{\overline{P}_{t-1}^{y-1}} \right) \cdot \left(q_{j,t-1} - \overline{q}_{j,t-1}^{y-1} \right) \right] \qquad \text{(A.9)}$$

donde:

$\overline{K}_{j,t}^{y-1}$: contribución trimestral promedio de j al nivel agregado en el año previo a t

Contribución a la variación anual de la serie en alta frecuencia (trimestral, mensual, etc.):

Puede repetirse el mismo ejercicio anterior para la variación de otros intervalos, en este caso anual. Con *f* siendo la subdivisión anual (*f* =4 para trimestral, *f* =12 para mensual) de forma análoga se llega a:

$$c_{j,t}^{yoy} = \frac{1}{Q_{t-f}} \cdot \left[\left(\frac{\overline{p}_{j,t-f}^{y-1}}{\overline{P}_{t-f}^{y-1}} \right) \cdot \left(q_{j,t} - q_{j,t-f} \right) + \left(\frac{\overline{p}_{j,t}^{y-1}}{\overline{P}_{t}^{y-1}} - \frac{\overline{p}_{j,t-f}^{y-1}}{\overline{P}_{t-f}^{y-1}} \right) \cdot \left(q_{j,t} - \overline{q}_{j,t}^{y-1} \right) \right] \qquad \text{(A.10)}$$

Series de contribución al nivel de la serie agregada trimestral:

En la comprobación de la consistencia entre las contribuciones trimestrales y anuales se generaron series de contribución al nivel del agregado trimestral. Estas series podrían ser de utilidad para la aplicación de modelos y herramientas que dependen en su estructura de propiedades contables de los índices de base fija que no se cumplen con series encadenadas, pues son coherentes con dichas series encadenadas pero exhiben las propiedades requeridas.

A partir de la derivación de la expresión para la contribución a la variación trimestral del agregado es fácil encontrar expresiones para las contribuciones a los niveles. Una forma sencilla de hacerlo es recurrir a las contribuciones en frecuencia anual y distribuir estas acordemente utilizando la expresión (A.5):

$$k_{j,t} \;=\; \overline{K}^{y-1}_{j,t} \;+\; \left(\frac{\overline{p}^{y-1}_{j,t}}{\overline{P}^{y-1}_{t}}\right)\cdot\left(q_{j,t} \;-\; \overline{q}^{y-1}_{j,t}\right) \tag{A.11}$$

donde

$k_{j,t}$	:	contribución de j al nivel del agregado en t
$\overline{K}^{y-1}_{j,t}$	:	contribución trimestral promedio de j al nivel agregado en el año previo a t
$\overline{p}^{y-1}_{j,t}$	:	deflactor implícito de precios del componente j del año previo al trimestre t
$\overline{P}^{y-1}_{t}$	:	deflactor implícito de precios del agregado del año previo al trimestre t
$q_{j,t}$	:	componente j en el trimestre t
$\overline{q}^{y-1}_{j,t}$	:	promedio trimestral del componente j en el año previo al trimestre t

Este método es válido haya empalme o no, sin embargo, es necesario calcular recursivamente las contribuciones en frecuencia anual utilizando la expresión (A.2).

Otra forma, que no puede aplicarse de haber empalmes pero que es autocontenida, es recurrir a la expresión (A.8) y anclarse de la contribución al nivel del periodo anterior. Con esto, la contribución del componente *j* al nivel del agregado en *t* es:

$$k_{j,t} \;=\; k_{j,t-1} \;+\; c_{j,t}\cdot Q_{t-1} \tag{A.12}$$

Análogamente a la obtención de (A.2), dado que en el año de referencia, y_0, la contribución al nivel agregado del componente *j* es igual al componente *j*, la contribución al nivel en *t* puede expresarse como el componente *j* en el trimestre t^0 del año de referencia más la suma de las contribuciones a los cambios desde ese periodo hasta *t*.

$$k_{j,t} \;=\; q_{j,t^0} \;+\; \sum_{g=t^0+1}^{t}\left[c_{j,g}\cdot Q_{g-1}\right] \tag{A.13}$$

Como último punto, cabe notar que la relación única entre las series de contribuciones y las series originales permite que, así como las series de contribuciones se obtienen a partir de las originales, las series encadenadas puedan recuperarse de las de contribuciones. Remplazando (A.8) en (A.12) se obtiene:

$$k_{j,t} \;=\; k_{j,t-1} \;+\; \left[\overline{w}^{y-1}_{j,t-1}\cdot\left(q_{j,t}-q_{j,t-1}\right) \;+\; \left(\overline{w}^{y-1}_{j,t}-\overline{w}^{y-1}_{j,t-1}\right)\cdot\left(q_{j,t}-\overline{q}^{y-1}_{j,t}\right)\right]$$

Luego, con un simple ordenamiento se puede expresar el componente original en términos de las contribuciones y promedios pasados de la serie encadenada:

$$q_{j,t} = \frac{1}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \cdot \left(k_{j,t} - k_{j,t-1}\right) + \frac{1}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \cdot \left(\overline{w}_{j,t}^{y-1} - \overline{w}_{j,t-1}^{y-1}\right) \cdot \overline{q}_{j,t}^{y-1} + \frac{\overline{w}_{j,t-1}^{y-1}}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \cdot q_{j,t-1} \qquad \text{(A.14)}$$

Análogamente a la obtención de (A.2) y (A.13), la expresión puede utilizase rezagada un periodo para dejar la expresión en términos del periodo de referencia. El resultado de este proceso es:

$$q_{j,t} = \frac{1}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \cdot \left(k_{j,t} - k_{j,t^o}\right) + \frac{1}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \cdot \sum_{i=t^0+1}^{t} \left[\left(\overline{w}_{j,i}^{y-1} - \overline{w}_{j,i-1}^{y-1}\right) \cdot \overline{q}_{j,i}^{y-1} \right] + \left(\frac{\overline{w}_{j,t^o}^{y-1}}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \right) \cdot q_{j,t^o}$$

En el periodo de referencia, se tiene que $k_{j,t^o} = q_{j,t^o}$ y por otra parte que $\overline{p}_{j,t^0}^{y-1} = \overline{P}_{t^0}^{y-1} = \overline{w}_{j,t^0}^{y-1} = 1$.
Esto se debe a que en dicho año la serie encadenada está valorada a precios promedios del mismo año y por lo tanto el valor anual es igual al anual nominal. Con eso:

$$\begin{aligned} q_{j,t} &= \frac{1}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \cdot \left(k_{j,t} - q_{j,t^o}\right) + \frac{1}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \cdot \sum_{i=t^0+1}^{t} \left[\left(\overline{w}_{j,i}^{y-1} - \overline{w}_{j,i-1}^{y-1}\right) \cdot \overline{q}_{j,i}^{y-1} \right] + \left(\frac{1}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \right) \cdot q_{j,t^o} \\ &= \frac{1}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \cdot k_{j,t} + \frac{1}{\overline{w}_{j,t}^{y-1}} \cdot \sum_{i=t^0+1}^{t} \left[\left(\overline{w}_{j,i}^{y-1} - \overline{w}_{j,i-1}^{y-1}\right) \cdot \overline{q}_{j,i}^{y-1} \right] \end{aligned}$$

Con esto, el componente original puede expresarse como la contribución al nivel ponderado por los precios relativos más la el efecto acumulativo de los cambios en su importancia relativa:

$$q_{j,t} = \frac{\overline{P}_t^{y-1}}{\overline{p}_{j,t}^{y-1}} \cdot \left(k_{j,t} + \sum_{i=t^0+1}^{t} \left[\left(\frac{\overline{p}_{j,i}^{y-1}}{\overline{P}_i^{y-1}} - \frac{\overline{p}_{j,i-1}^{y-1}}{\overline{P}_{i-1}^{y-1}} \right) \cdot \overline{q}_{j,i}^{y-1} \right] \right) \qquad \text{(A.15)}$$

donde

$q_{j,t}$: componente j en el trimestre t
$k_{j,t}$: contribución de j al nivel del agregado en t
$\overline{p}_{j,t}^{y-1}$: deflactor implícito de precios del componente j del año previo al trimestre t
$\overline{P}_t^{y-1}$: deflactor implícito de precios del agregado del año previo al trimestre t
t^0 : trimestre perteneciente al año de referencia

Anexo 3: Ejemplo numérico de la aplicación de la fórmula de contribuciones.

A continuación se presentan tres ejemplos de cálculo usando la fórmula de contribuciones en base al ejemplo numérico de la tabla 3.1. Para fines expositivos se separan los dos términos de (7):

$$c_{j,t} = \underbrace{\frac{1}{Q_{t-1}}\cdot\left(\frac{\bar{p}^{\,y-1}_{j,t-1}}{\bar{P}^{\,y-1}_{t-1}}\right)\cdot\left(q_{j,t}-q_{j,t-1}\right)}_{(a.1)} + \underbrace{\frac{1}{Q_{t-1}}\cdot\left(\frac{\bar{p}^{\,y-1}_{j,t}}{\bar{P}^{\,y-1}_{t}} - \frac{\bar{p}^{\,y-1}_{j,t-1}}{\bar{P}^{\,y-1}_{t-1}}\right)\cdot\left(q_{j,t}-\bar{q}^{\,y-1}_{j,t}\right)}_{(a.2)}$$

Tabla A.1: Contribuciones al crecimiento trimestral y anual

Crecimiento Anual	A	B	Pa	Pb
	5%	10%	30%	-5%

Anual	Series ENCADENADAS A	B	Total	v.a/a (%)	Series NOMINALES A	B	Total	v.a/a (%)
2003	199.835	400.404	**600.239**		199.835	400.404	**600.239**	
2004	209.827	440.444	**650.271**	*8.34*	272.774	418.422	**691.196**	*15.15*
2005	220.318	484.489	**702.467**	*8.03*	372.337	437.251	**809.588**	*17.13*

	Series ENCADENADAS				**Contribución al crecimiento trimestral (%)**				**Contribución al crecimiento anual (%)**			
Trimestral	A	B	**Total**	*v.a/a %*	a.1	a.2	A (a.1 + a.2)	B	a.1	a.2	A (a.1 + a.2)	B
Mar-03	49.048	96.552	**145.601**									
Jun-03	49.650	98.880	**148.531**	*2.012*	*0.413*	-	0.413	1.599				
Sep-03	50.260	101.265	**151.524**	*2.016*	*0.410*	-	0.410	1.605				
Dec-03	50.876	103.707	**154.583**	*2.019*	*0.407*	-	0.407	1.612				
Mar-04	51.501	106.207	**157.708**	*2.022*	*0.404*	-	0.404	1.618	*1.684*	-	1.684	6.631
Jun-04	52.133	108.768	**160.901**	*2.025*	*0.401*	-	0.401	1.624	*1.671*	-	1.671	6.657
Sep-04	52.773	111.391	**164.164**	*2.028*	*0.398*	-	0.398	1.630	*1.658*	-	1.658	6.683
Dec-04	53.420	114.077	**167.498**	*2.031*	*0.395*	-	0.395	1.636	*1.646*	-	1.646	6.709
Mar-05	54.076	116.828	**170.551**	*1.823*	*0.391*	*0.216*	0.607	1.216	*1.633*	*0.229*	1.862	6.282
Jun-05	54.739	119.645	**173.881**	*1.952*	*0.476*	-	0.476	1.476	*1.620*	*0.316*	1.936	6.130
Sep-05	55.411	122.530	**177.281**	*1.955*	*0.473*	-	0.473	1.483	*1.607*	*0.401*	2.009	5.982

* Contribuciones calculadas con todos los decimales por lo que los resultados pueden diferir levemente del de los ejercicios.

Contribución al crecimiento trimestral del agregado:

SIN efecto real del cambio en composición del agregado: El cálculo dentro de un mismo año conlleva a que no haya actualización de precios y por lo tanto el segundo término de la expresión (11) se hace cero.

$$c_{A,Jun.2005} = \frac{1}{Q_{Mar.2005}}\cdot\left(\frac{\dfrac{\mathrm{nom}_A^{2004}}{q_A^{2004}}}{\dfrac{\mathrm{nom}_Q^{2004}}{Q^{2004}}}\right)\cdot\left(q_{A,Jun.2005}-q_{A,Mar.2005}\right) + \frac{1}{Q_{Mar.2005}}\cdot\left(\frac{\dfrac{\mathrm{nom}_A^{2004}}{q_A^{2004}}}{\dfrac{\mathrm{nom}_Q^{2004}}{Q^{2004}}} - \frac{\dfrac{\mathrm{nom}_A^{2004}}{q_A^{2004}}}{\dfrac{\mathrm{nom}_Q^{2004}}{Q^{2004}}}\right)\cdot\left(q_{A,Jun.2005}-\frac{q_A^{2004}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{170.551}\cdot\left(\frac{\dfrac{272.774}{209.827}}{\dfrac{691.196}{650.271}}\right)\cdot\left(54.739-54.076\right) + 0$$

$$= 0.475\%$$

<u>CON efecto real del cambio en composición del agregado</u>: El cálculo para el primer periodo de cada año reconoce la actualización en la estructura de precios:

$$c_{A,Mar2005} = \frac{1}{Q_{Dic.2004}}\cdot\left(\frac{\frac{\mathrm{nom}_A^{2003}}{q_A^{2003}}}{\frac{\mathrm{nom}_Q^{2003}}{Q^{2003}}}\right)\cdot\left(q_{A,Mar2005}-q_{A,Dic2004}\right) + \frac{1}{Q_{Dic2004}}\cdot\left(\frac{\frac{\mathrm{nom}_A^{2004}}{q_A^{2004}}}{\frac{\mathrm{nom}_Q^{2004}}{Q^{2004}}}-\frac{\frac{\mathrm{nom}_A^{2003}}{q_A^{2003}}}{\frac{\mathrm{nom}_Q^{2003}}{Q^{2003}}}\right)\cdot\left(q_{A,Mar2005}-\frac{q_A^{2004}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{167.498}\cdot\left(\frac{\frac{199.835}{199.835}}{\frac{600.239}{600.239}}\right)\cdot\left(54.076-53.420\right) + \frac{1}{167.498}\cdot\left(\frac{\frac{272.774}{209.827}}{\frac{691.196}{650.271}}-\frac{\frac{199.835}{199.835}}{\frac{600.239}{600.239}}\right)\cdot\left(54.076-\frac{209.827}{4}\right)$$

$$= 0.392\% + 0.216\%$$

$$= 0.608\%$$

Contribución al crecimiento anual de la serie trimestral del agregado:

Para la contribución al crecimiento anual de la serie trimestral, siempre se comparan periodos de años distintos y por lo tanto siempre es necesario incorporar el término que reconoce la actualización de la estructura de precios:

$$c_{A,Mar2005}^{yoy} = \frac{1}{Q_{Mar.2004}}\cdot\left(\frac{\frac{\mathrm{nom}_A^{2003}}{q_A^{2003}}}{\frac{\mathrm{nom}_Q^{2003}}{Q^{2003}}}\right)\cdot\left(q_{A,Mar2005}-q_{A,Mar2004}\right) + \frac{1}{Q_{Mar2004}}\cdot\left(\frac{\frac{\mathrm{nom}_A^{2004}}{q_A^{2004}}}{\frac{\mathrm{nom}_Q^{2004}}{Q^{2004}}}-\frac{\frac{\mathrm{nom}_A^{2003}}{q_A^{2003}}}{\frac{\mathrm{nom}_Q^{2003}}{Q^{2003}}}\right)\cdot\left(q_{A,Mar2005}-\frac{q_A^{2004}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{157.708}\cdot\left(\frac{\frac{199.835}{199.835}}{\frac{600.239}{600.239}}\right)\cdot\left(54.076-51.501\right) + \frac{1}{157.708}\cdot\left(\frac{\frac{272.774}{209.827}}{\frac{691.196}{650.271}}-\frac{\frac{199.835}{199.835}}{\frac{600.239}{600.239}}\right)\cdot\left(54.076-\frac{209.827}{4}\right)$$

$$= 1.633\% + 0.229\%$$

$$= 1.862\%$$

Estudios Económicos Estadísticos
Banco Central de Chile

Studies in Economic Statistics
Central Bank of Chile

NÚMEROS ANTERIORES

PAST ISSUES

Los Estudios Económicos Estadísticos en versión PDF pueden consultarse en la página en Internet del Banco Central www.bcentral.cl . El precio de la copia impresa es de $500 dentro de Chile y US$12 al extranjero. Las solicitudes se pueden hacer por fax al: +56 2 26702231 o por correo electrónico a: bcch@bcentral.cl.

Studies in Economic Statistics in PDF format can be downloaded free of charge from the website www.bcentral.cl . Separate printed versions can be ordered at a price of Ch$500, or US$12 from overseas. Orders can be placed by fax: +56 2 26702231 or email: bcch@bcentral.cl.

EEE – 99 Junio 2013
Nueva Metodología de Cálculo para el Crecimiento de la Actividad. Generación Eléctrica en Frecuencia Mensual
Felipe Labrin y Marcelo Méndez

EEE – 98 Mayo 2013
Ajuste Estacional de Series Macroeconómicas Chilenas
Marcus Cobb y Maribel Jara

EEE – 97 Mayo 2013
Exposiciones intersectoriales en Chile: Una aplicación de las Cuentas Nacionales por Sector Institucional
Ivette Fernández

EEE – 96 Marzo 2013
Series Históricas del PIB y componentes del gasto, 1986-2008
Marcus Cobb, Gonzalo Echavarría, y Maribel Jara

EEE – 95 Febrero 2013
SAM 2008 para Chile. Una Presentación Matricial de la Compilación de Referencia 2008
José Venegas

EEE – 94 Diciembre 2012
Carry-To-Risk Ratio como Medida de Carry Trade
Sergio Díaz, Paula González, y Claudia Sotz

EEE – 93 Diciembre 2012
Medidas de Expectativas de Inflación: Compensación Inflacionaria en Base a Swap Promedio Cámara y Seguro de Inflación
Sergio Díaz

EEE – 92 Agosto 2012
Estadísticas de Colocaciones
Erika Arraño y Beatriz Velásquez

EEE – 91 Abril 2012
Empalme Estadístico del PIB y de los Componentes del Gasto: Series Anuales y Trimestrales 1986-2003, Referencia 2008
Simón Guerrero y María Pilar Pozo

EEE – 90 Marzo 2012
Nuevas Series de Cuentas Nacionales Encadenadas: Métodos y Fuentes de Estimación
Simón Guerrero, René Luengo, Pilar Pozo, y Sebastián Rébora

EEE – 89 Marzo 2012
Implementación del Sexto Manual de Balanza de Pagos del FMI en las Estadísticas Externas de Chile
Juan Eduardo Chackiel y María Isabel Méndez

EEE – 88 Septiembre 2011
Mercado Cambiario 2000-2010: Comparación Internacional de Chile
María Gabriela Acharán y José Miguel Villena

EEE – 87 Julio 2011
Cuentas Nacionales por Sector Institucional, CNSI. Metodología y Resultados 2005-2011.I.
División de Estadísticas, Gerencia de Estadísticas Macroeconómicas, Banco Central de Chile

EEE – 86 Abril 2011
Publicación de Estadísticas Cambiarias del Banco Central de Chile
María Gabriela Acharán y José Miguel Villena

EEE – 85 Abril 2011
Remesas Personales desde y hacia Chile
Álvaro del Real y Alfredo Fuentes

EEE – 84 Marzo 2011
Chilean Direct Investment, 2006-2009
Francisco Gaete y Miguel Ángel Urbina

EEE – 83 Diciembre 2010
Una Caracterización de las Empresas Privadas No Financieras de Chile
Josué Pérez Toledo

EEE – 82 Mayo 2010
Una Nota Introductoria a la Encuesta de Expectativas Económicas
Michael Pedersen

EEE – 81 Abril 2010
Una Visión Global de la Deuda Financiera de los Hogares Chilenos en la Última Década
José Miguel Matus, Nancy Silva, Alejandra Marinovic, y Karla Flores

EEE – 80 Noviembre 2009
Clasificación del Gasto en Consumo Final de los Hogares e Instituciones Privadas Sin Fines de Lucro por Finalidad, Período 2003-2007
Ivette Fernández

EEE – 79 Noviembre 2009
Empalme de Subclases del IPC de Chile Series Mensuales 1989-2008
Michael Pedersen, Hernán Rubio, y Carlos Saavedra

EEE – 78 Septiembre 2009
Metodología y Resultados de la Mensualización del PIB Sectorial Trimestral en el Período 1996-2008
Pilar Pozo y Felipe Stanger

EEE – 77 Julio 2009
Clasificación del Gasto de Consumo Final del Gobierno por Funciones (COFOG) en el Periodo 2003-2007
Laura Guajardo

EEE – 76 Junio 2009
Diagnóstico de Estacionalidad con X-12-ARIMA
Mauricio Gallardo y Hernán Rubio

EEE – 75 Marzo 2009
El Mercado Cambiario Chileno en el Período 1998-2008
Paulina Rodríguez y José Miguel Villena

EEE – 74 Marzo 2009
Indicadores Cuantitativos de Calidad aplicados a Componentes de la Balanza de Pagos Chilena
Andrea Contreras y Sergio Cooper

EEE – 73 Marzo 2009
Caracterización de las Colocaciones Bancarias en Chile
José Matus, Daniel Oda, y Nancy Silva

EEE – 72 Enero 2009
Descripción del Funcionamiento del Mercado Secundario de Bonos Soberanos Locales en Chile
Sergio D’Acuña, Sergio Godoy, y Nicolás Malandre

BANCO CENTRAL
DE CHILE