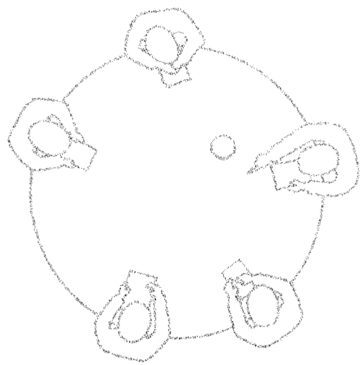
Serie de Estudios Económicos

Documentos de Investigación



Nº 23

El modelo logístico

Leonidas Espina Marconi

Santiago, Enero de 1984

TRABAJO EDITADO POR EL
DEPARTAMENTO DE INFORMACIONES
ESTADISTICAS Y PUBLICACIONES
DEL BANCO CENTRAL DE CHILE

Edición de 300 ejemplares

INDICE

1. INTRODUCCION

Este trabajo tiene por finalidad la presentación de un método que determine la estructura del llamado Modelo Logístico.

Este modelo expresa analíticamente el fenómeno del crecimiento que es el desarrollo natural de los seres orgánicos.

La semilla de un árbol va germinando lentamente bajo tierra; en seguida, emerge a la luz del sol y comienza un desarrollo rápido que va seguido, posteriormente, por una etapa de lento crecimiento hasta llegar a su altura máxima de desarrollo.

Tanto la población humana como asimismo los animales y vegetales encuentran obstáculos· de sobrevivencia, los que aumentan proporcionalmente con relación al exceso de la población total. Esto significa que después de un crecimiento acelerado de la población sobrevendría siempre un período de más lento avance, el que finalmente tendería a estacionarse.

El modelo se planteó inicialmente para los estudios de la población humana, su desarrollo y proyecciones; más adelante se aplicó a los vacunos y ganado, para continuar con el estudio de los frutales y árboles en general.

En vista de que tal modelo presentaba excelentes resultados, se empezó a utilizar en indicadores económicos, tales como el ingreso nacional, el producto geográfico bruto, el crecimiento de una fortuna particular, etc., como también en todo tema que se adaptara a las condiciones generales; por ejemplo, el crecimiento de un fenómeno, los obstáculos que frenan su evolución y las circunstancias que impiden que su desarrollo exceda de un cierto límite máximo.

Fácilmente pueden detectarse algunas limitaciones que afectan al modelo, sobre todo en el campo económico donde se producen alteraciones imprevistas, provocadas por cambios políticos, sociales y físicos. Sin embargo, si se toma una tendencia a largo plazo, es el mejor modelo que por el momento se adapta a esas alteraciones.

El problema de las limitaciones puede plantearse en los siguientes términos: en el crecimiento de una población surgen circunstancias que impiden que su número exceda de un cierto máximo "K". Como consecuencia, la rapidez de crecimiento en el tiempo "t" es directamente proporcional al valor "y" en ese momento y a la diferencia entre ese máximo "K" y el valor actual "y".

La expresión analítica de este fenómeno se puede expresar por la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = a\ y\ (K - y) \tag{1}$$

dy/dt señala el crecimiento continuo a través del tiempo "t". El crecimiento específico que tiene cada especie o fenómeno se indica por el parámetro "a".

Como el crecimiento de la especie o fenómeno depende del factor "a", de la actual población "y" y de la diferencia entre el máximo "K" y esa población, se tiene la expresión "a y (K – y)".

La solución a la ecuación diferencial (1) se encuentra en el Anexo I y es la función.

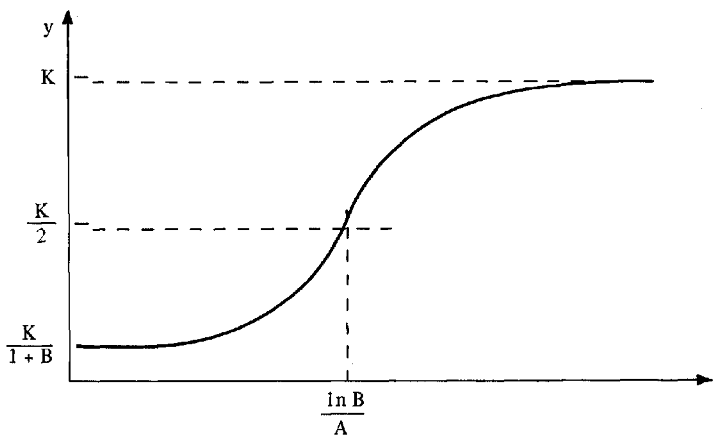
$$y = \frac{K}{1 + B\,e^{-At}} \tag{2}$$

La función (2) se conoce corrientemente como Modelo Logístico. La "K" es el máximo valor posible que puede alcanzar el fenómeno o la variable en estudio.

La "A" es el producto del parámetro "a" inicial por el máximo "K" y, finalmente, el parámetro "B" es una constante de integración que depende en cada caso de los datos dados.

2. CARACTERISTICAS DEL MODELO

En el siguiente gráfico se ha representado la función (2) con los puntos más característicos:



a) Cuando t = 0, o sea, en el comienzo del análisis.

$$y_{t=0} = \frac{K}{1+B} \tag{3}$$

b) La línea muestra un proceso de crecimiento muy lento al principio. En el caso del desarrollo económico de un país, señala el inicio del crecimiento hasta que empieza un cambio en la pendiente de la línea y sigue con un desarrollo cada vez más acelerado hasta llegar a un punto de inflexión de la curva, o sea, cuando se inicia un crecimiento más lento. Se puede decir que los países en desarrollo se encuentran en diferentes posiciones bajo este punto de inflexión.

c) El punto de inflexión es fundamental, según se puede desprender del gráfico. Por tal punto se define en matemática aquel en el cual cambia la concavidad de la curva; en otras palabras, que de una alta variación en el crecimiento pasa a una variación menor.

En los estudios realizados por Malthus sobre el crecimiento de la población, se dice que ésta crece en progresión geométrica, ya que la información de que él disponía en ese entonces era de países que estaban bajo este punto de inflexión. En su tiempo no se conocía el fenómeno de la población, según el cual ésta tiene un punto en que de un acelerado crecimiento (progresión geométrica) pasa a una variación cada vez menor.

Para este punto se tienen los siguientes valores:

$$t = \frac{\ln B}{A} \qquad \text{ordenada } y = \frac{K}{2} \tag{4}$$

En este punto de la curva, la ascensión de "y" llega a la mitad del valor máximo "K" posible.

Los países en desarrollo aspiran a que su producto geográfico bruto trate de llegar al punto de inflexión.

d) Desde este punto el crecimiento es cada vez menor, de modo que se va acercando asintóticamente a la ordenada y = K.

Por asíntota de una curva se entiende la recta que, prolongada indefinidamente, se acerca de continuo a una curva sin llegar nunca a encontrarla.

Después del punto de inflexión, la tasa de variación es cada vez menor hasta llegar prácticamente a cero.

Para el final de la línea se tienen teóricamente los valores:

$$t \text{ igual a infinito } \; y_{t=\infty} = K \tag{5}$$

La demostración del cálculo de estos puntos característicos se encuentra en el Anexo II: Cálculo de Puntos Característicos.

3. ESTIMACION DE LOS PARAMETROS

Para calcular los parámetros A, B y K se suele utilizar una primera aproximación, cuando sólo se desea tener una idea de esta función en un caso específico. Si debe lograrse un estudio más exacto, es necesario obtener una segunda aproximación.

a) Primera aproximación:

Después de tener una serie histórica de un fenómeno se eligen tres puntos equidistantes en el tiempo (t_0, t_1 y t_2), de modo que $h = t_1 - t_0 = t_2 - t_1$. Para los cálculos se hace $t_0 = 0$, que debería coincidir con un valor,de donde crece el fenómeno en forma muy lenta.

La elección de los otros dos puntos se debe ceñir a los momentos en que la serie demuestra ya rápidos crecimientos, o sea, en la parte rápidamente ascendente, que indique que el fenómeno presenta la forma del modelo logístico.

La demostración de las fórmulas que se indican a continuación se encuentra en el Anexo III: Cálculo de los Parámetros.

Para obtener el parámetro A, se usa la siguiente fórmula:

$$e^{-Ah} = \frac{y_0 \ (y_2 - y_1)}{y_2 \ (y_1 - y_0)} \qquad (6)$$

en que "e" es la base de los logaritmos naturales e = 2,71; los "y_i" corresponden a los valores del fenómeno que se refieren a los respectivos "t_i". El valor de $h = t_1 - t_0$.

Una vez calculado el segundo miembro, se aplica logaritmo natural a ambos miembros y se obtiene el valor de A.

Para calcular el parámetro "K" se utiliza la fórmula:

$$K = \frac{(e^{-Ah} - 1) \ y_0 \, y_1}{y_1 \, e^{-Ah} \quad y_0} \qquad (7)$$

La expresión e^{-Ah} es el valor obtenido en (6).

También se podrían haber utilizado los valores mismos del fenómeno en los tiempos t_i, sustituyendo (6) en (7) y sería:

$$K = y_1 \frac{y_0 (y_2 - y_1) - y_2 (y_1 - y_0)}{y_1 (y_2 - y_1) - y_2 (y_1 - y_0)} \tag{8}$$

El parámetro B se obtiene de:

$$B = \frac{K}{y_0} - 1 \quad \text{o} \quad B = \frac{K - y_0}{y_0} \tag{9}$$

Muy a menudo sólo se hace esta primera aproximación.

Como ejemplo se dará el caso de la población de Chile, en miles de personas:

Años	Población	t_i	y_1
1960	7.663	0	y_0
1970	9.340	10	y_1
1980	11.104	20	y_2

Fuente: Instituto Nacional de Estadísticas.

$e^{-Ah} = 0{,}72591 \qquad A = 0{,}032032$

$K = 22216{,}614 \qquad B = 1{,}8992057$

de donde $$y = \frac{22216{,}614}{1 + 1{,}899e^{-0{,}032t}} \tag{10}$$

Los cálculos se encuentran en el Anexo IV.

Se hará una comparación entre los datos dados y los datos calculados según el modelo

Años	Valores observados	Valores calculados
1960	7.663	7.664
1970	9.340	9.339
1980	11.104	11.101

b) Segunda aproximación:

La segunda aproximación supone una corrección de los parámetros A, B y K, con todos los valores disponibles; el modelo quedaría así:

$$y = \frac{K + k}{1 + (B + b)e^{-(A+a)t}} \qquad (11)$$

siendo a, b y k los parámetros correctores.

En seguida, según las ecuaciones normales se tendría:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma w_1 &= b\,\Sigma u_i - a\,\Sigma v_i - n\,k \\ \Sigma u_i w_i &= b\,\Sigma (u_i)^2 - a\,\Sigma u_i v_i - k\,\Sigma u_i \\ \Sigma v_i w_i &= b\,\Sigma u_i v_i - a\,\Sigma v_i^2 - k\,\Sigma v_i \end{aligned}\right| \qquad (12)$$

siendo $u_i = y_i\, e^{-At_i}$

$v_i = Bx_i\; y_i\; e^{-At_i}$

$w_i = K - (By_i e^{-Ati} + y_i)$

La demostración de este sistema de ecuaciones se encuentra en el Anexo V. Segunda Aproximación. El calculo númerico se encuentra en el Anexo VI. Se tomó la siguiente información de la población, del Instituto Nacional de Estadísticas.

Período	Población (miles hab.)
1960	7.663
1965	8.510
1970	9.340
1975	10.196
1980	11.104

El cálculo de los parámetros correctores dio el siguiente resultado:

$a = 0{,}000722$
$b = -0{,}107996$
$k = -833{,}842$

Lo que daría para la población de Chile el siguiente modelo logístico:

$$y = \frac{21382{,}772}{1 + 1{,}791e^{-0{,}033t}}$$

4. CONCLUSIONES

El objetivo que se pretendía en este trabajo era presentar un método para determinar la estructura del Modelo Logístico, que explica el fenómeno del crecimiento. Como ejemplo de su uso, se empleó la población de Chile y se llegó a la siguiente función:

$$y = \frac{21382,772}{1 + 1,791 e^{-0,033}}$$

Para comprobar si la estructura del modelo encontrado es correcta, es necesario comparar los resultados, que son:

Período	Población dada	Población según modelo
1960	7.663	7.661
1965	8.510	8.490
1970	9.340	9.347
1975	10.196	10.222
1980	11.104	11.104

A estos resultados se aplica la docimasia de la correlación no lineal, que dio $r = 0,958$, valor significativo para $n = 5$, que era el número de datos dados. Se ve que el modelo encontrado satisface plenamente.

Se podrían deducir otras informaciones que se refieren a las características del modelo, como la determinación del punto de inflexión y el máximo que puede alcanzar la población de Chile.

La población de Chile en 1978 alcanzó a 10.692.000 habitantes, en el punto de inflexión, lo cual significa que desde ese año la población chilena experimentó un cambio en sus variaciones porcentuales anuales, disminuyendo desde entonces. Esto se comprueba con los datos del INE.

Por otro lado, el máximo que puede alcanzar la población de Chile, si sigue su crecimiento como en el período 1960-1980, es de 21.383.000 personas a muy largo plazo.

Finalmente, el modelo sirve para hacer proyecciones. Así, en el ejemplo de Chile, la proyección para 1982 dio una población de 11.455.000 personas, que difiere de la obtenida por el censo que dio una cifra provisional de 11.275.000 personas, valor sujeto a corrección.

Esto demuestra que se ha alcanzado el objetivo deseado por este trabajo: presentar un método para determinar la estructura del Modelo Logístico que sirve para hacer proyecciones a muy largo plazo de población, tanto humana, como animal o vegetal; de desarrollo económico o de cualquier fenómeno que refleje crecimiento.

ANEXO I

Solución Matemática al Problema del Crecimiento

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = a\ y\ (K - y)$$

se transforma en

$$\frac{dy}{y\,(K-y)} = a\,dt$$

Las variables han sido separadas y se puede integrar

$$\int \frac{dy}{y\,(K-y)} = a \int dt \qquad (13)$$

El segundo miembro es una integral inmediata. El primer miembro se puede integrar por fracciones en la forma siguiente:

$$\frac{1}{y\,(K-y)} = \frac{U}{y} + \frac{V}{K-y}$$

$$= \frac{U\,(K-y) + V\,y}{y\,(K-y)}$$

Luego $1 = U\,(K-y) + Vy$

$1 = UK - (U-V)\,y$

de donde $UK = 1$ y $U - V = 0$

por lo tanto U = V = 1/K

Se sustituye en (13)

$$\int \frac{dy}{y\,(K-y)} = \int \frac{1/K\;dy}{y} + \int \frac{1/K\;dy}{K-y} = \int a\,dt$$

$$1/K \left[\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{K-y} \right] = a\,t + c$$

$$1/K \; \left[\ln y - \ln (K-y) \right] = a\,t + c$$

$$\ln \frac{y}{K-y} = a\,K\,t + K\,C$$

$$\frac{y}{K-y} = e^{a\,K\,t + K\,C}$$

de aquí se obtiene $y + ye^{a\,K\,t + K\,C} = K\,e^{a\,K\,t + K\,C}$

$$y = \frac{K\,e^{a\,K\,t + K\,C}}{1 + e^{a\,K\,t + K\,C}}$$

y finalmente

$$y = \frac{K}{1 + e^{-a\,K\,t - K\,C}}$$

los valores constantes se pueden sustituir por:

$$a\,K = A \qquad\qquad e^{-K\,C} = B$$

de donde

$$y = \frac{K}{1 + B\,e^{-A\,t}} \qquad (2)$$

que es el modelo logístico que se buscaba.

ANEXO II

Cálculo de los puntos Característicos

Los puntos más característicos del modelo logístico

$$y = \frac{K}{1 + B\,e^{-At}}$$

son los siguientes:

a) Intersección con el eje de las "y"

al hacer t = 0 se obtiene

$$y = \frac{K}{1 + B} \tag{14}$$

Normalmente desde este punto parte la curva.

b) Intersección con el eje de las "t"

Para cualquier valor de "t" (desde menos infinito a más infinito) no puede existir valor alguno negativo. Por lo tanto, el eje "t" no podrá ser cortado por la curva. Para el caso en que $t = -\infty$ $y = 0$, la curva se hace asintótica al eje de las "t" en los valores negativos.

c) Puntos máximos y mínimos.

Estos valores se obtienen de la primera derivada de la función

$$y' = KAB\,e^{-At}\ \frac{1}{\left(1 + B\,e^{-At}\right)^2}$$

Al igualar a cero esta expresión, se ve que no existen para esa curva ni máximos ni mínimos.

d) Crecimiento o decrecimiento de la curva.

Al hacer mayor o menor que cero la primera derivada, se ve que sólo existe crecimiento para la curva en todo el recorrido.

e) Puntos de inflexión.

Se obtiene de la segunda derivada que es:

$$y'' = K A^2 B e^{-At} \left[\frac{2 Be^{At}}{\left(1 + Be^{-At}\right)^3} - \frac{1}{\left(1 + B e^{-At}\right)^2} \right]$$

Al igualar a cero esta expresión y efectuar las simplificaciones se obtiene un sólo punto de inflexión que es:

$$t = \frac{\ln b}{A} \quad y = \frac{K}{2} \tag{15}$$

f) Concavidad

Al hacer la segunda derivada mayor o menor que cero, se obtiene la concavidad. El punto de inflexión divide la concavidad. La primera parte, desde el origen hasta ese punto de inflexión, señala una concavidad hacia arriba; después de ese punto, la concavidad es hacia abajo.

g) Máximo absoluto.

Al hacer tender "t" a $+\infty$, se obtiene un máximo absoluto que es K. La recta "K", paralela al eje de las "t", es una asíntota de la curva y es el valor máximo posible.

ANEXO III

Cálculo de los Parámetros (Primera aproximación)

Tres son los parámetros que hay que determinar en el modelo estudiado A, B y K.

Se considera el modelo $y = \dfrac{K}{1 + B\,e^{-At}}$

Se sabe que $h = t_2 - t_1 = t_1 - t_0$, pues para efectuar la primera aproximación se toman tres puntos equidistantes del tiempo, que son: t_0, t_1, t_2, siendo $t_0 = 0$. Por lo tanto, se efectúa la siguiente sustitución $t_0 = 0$, $t_1 = h$ y $t_2 = 2h$. Luego se tiene para:

$t_0 = 0$

$$y_0 = \frac{K}{1 + B} \text{ de donde } \frac{K}{y_0} = 1 + B \qquad (16)$$

para:

$t_1 = h$

$$y_1 = \frac{K}{1 + B\,e^{-Ah}} \text{ de donde } \frac{K}{y_1} = 1 + B\,e^{-Ah} \qquad (17)$$

y finalmente para:

$t_2 = 2h$

$$y_2 = \frac{K}{1 + B\,e^{-2Ah}} \text{ de donde } \frac{K}{y_2} = 1 + B \cdot e^{-2Ah} \qquad (18)$$

Se resta (17) de (16) y (18) de (16), y queda lo siguiente:

$$\frac{K}{y_0} - \frac{K}{y_1} = B - B\,e^{-Ah} \text{ lo que da } K\frac{y_1 - y_0}{y_0\,y_1} = B\,(1 - e^{-Ah}) \qquad (19)$$

$$\frac{K}{y_0} - \frac{K}{y_2} = B - B\,e^{-2Ah} \text{ de donde } K\frac{y_2 - y_0}{y_0\,y_2} = B\,(1 - e^{-2Ah}) \qquad (20)$$

Se divide (20) por (19), del modo siguiente:

$$\frac{y_2-y_0}{y_0\ y_2}\cdot\frac{y_0\ y_1}{y_1\ -y_0}=\frac{1-e^{-2Ah}}{1-e^{-Ah}}=\frac{(1+e^{-Ah})(1-e^{-Ah})}{1-e^{-Ah}}$$

haciendo las simplificaciones correspondientes se llega a:

$$\frac{y_1\ (y_2-y_0)}{y_2\ (y_1-y_0)}=1+e^{-Ah}$$

y finalmente se obtiene:

$$e^{-Ah}=\frac{y_0\ (y_2-y_1)}{y_2\ (y_1-y_0)} \tag{21}$$

de aquí se obtiene el parámetro A.

Para el parámetro K, se parte de la ecuación (16) multiplicándola con la expresión e^{-Ah} que ya se conoce. Además se emplea la ecuación (17) para formar un sistema

$$\begin{array}{l|l} e^{-Ah}\dfrac{K}{y_0}=e^{-Ah}+B\,e^{-Ah} & (16)\ x\,e^{-Ah} \\ \\ \dfrac{K}{y_1}=1+B\,e^{-Ah} & (17) \end{array}$$

Se resta la segunda ecuación de la primera y queda:

$$e^{-Ah}\frac{K}{y_0}-\frac{K}{y_1}=e^{-Ah}-1$$

y finalmente se obtiene:

$$K=\frac{(e^{-Ah}-1)\ y_0\ y_1}{y_1\ e^{-Ah}-y_0} \tag{22}$$

Finalmente el último parámetro se obtiene de la ecuación (16)

$$B=\frac{K}{y_0}-1=\frac{K-y_0}{y_0} \tag{23}$$

ANEXO IV

Cálculo númerico de los Parámetros A, B y K (Primera aproximación)

	t_i	y_i		
1960	0	7.663	y_0	$y_1 - y_0 = 1677$
1970	10	9.340	y_1	$y_2 - y_1 = 1764$
1980	20	11.104	y_2	h = 1970 – 1980 = 10

Cálculo de A

$$e^{-Ah} = \frac{y_0\ (y_2 - y_1)}{y_2\ (y_1 - y_0)} = \frac{7663 \times 1764}{11104 - 1677} = 0{,}72591$$

$e^{-Ah} = 0{,}72591 \qquad A = 0{,}032032$

Cálculo de K

$$K = \frac{(e^{-Ah} - 1)\ y_0\ y_1}{y_1\ e^{-Ah} - y_0} = \frac{(-0{,}27409) \times 7663 \times 9340}{9340 \times 0{,}72592 - 7663}$$

$K = 22216{,}614$

Cálculo de B

$$B = \frac{K - y_0}{y_0} = \frac{22216{,}614 - 7663}{7663}$$

$B = 1{,}8992057$

Primera aproximación

$$y = \frac{22216{,}614}{1 + 1{,}899\, e^{-0{,}032t}} \qquad (10)$$

ANEXO V

Cálculo de los Parámetros a, b y k (Segunda aproximación)

La segunda aproximación supone una corrección de los parámetros A, B y K, con todos los valores disponibles. La función se convierte en:

$$y = \frac{K + k}{1 + (B + b)\, e^{-(A+a)t}} \qquad (24)$$

de donde:

$$y = \frac{K + k}{1 + (B + b)\, e^{-At}\, e^{-at}}$$

El desarrollo de e^{-ax}, según series de Maclaurin sería:

$$e^{-ax} = 1 - ax + \frac{a^2 x^2}{2!} - \frac{a^3\ x^3}{3!} + \frac{a^4\ x^4}{4!}$$

siendo "a" muy pequeña, se pueden despreciar desde el tercer término adelante. Luego

$$e^{-ax} \approx 1 - ax$$

Luego

$$y = \frac{K + k}{1 + (B + b)\, e^{-At}\,(1 - at)} \qquad (25)$$

$$y = \frac{K + k}{1 + Be^{-At} - atBe^{-At} + be^{-At} - atbe^{-At}}$$

La expresión $atbe^{-At}$ es muy pequeña y se desprecia.

Luego se tiene:

$$y = \frac{K + k}{1 + B e^{-At} - atBe^{-At} + be^{-At}}$$

$$y + B y e^{-At} - atBye^{-At} + b y e^{-At} = K + k$$

Ordenando los términos, se tiene:

$$K - (B y e^{-At} + y) = b y e^{-At} - atBye^{-At} - k$$

Se usan las siguientes variables auxiliares

$$w = K - (B y e^{-At} + y)$$
$$u = y e^{-At}$$
$$v = t B y e^{-At}$$

y se aplican las ecuaciones normales

$$\left.\begin{aligned} \Sigma w_i &= b \Sigma u_i - a \Sigma v_i - n k \\ \Sigma u_i w_i &= b \Sigma (u_i)^2 - a \Sigma u_i v_i - k \Sigma u_i \\ \Sigma v_i w_i &= b \Sigma u_i v_i - a \Sigma v_i^2 - k \Sigma v_i \end{aligned}\right| \quad (12)$$

ANEXO VI

Cálculo Numérico de los Parámetros a, b y k

	t_i	y_i	$e^{-0,032t_i}$	u_i $y_i e^{-0,032t_i}$	$B\ y_i e^{-0,032t_i}$
1960	0	7.663	1,00000	7.663,00	14.552,04
1965	5	8.510	0,85214	7.251,71	13.771,00
1970	10	9.340	0,72614	6.782,15	12.879,30
1975	15	10.196	0,61878	6.309,08	11.980,94
1980	20	11.104	0,52729	5.855,03	11.118,70
				33.860,97	

t_i	v_i $t_i\ B\ y_i\ e^{-0,032t_i}$	$B\ y_i\ e^{-0,032t_i} + y_i$	w_i $K-(By_i\ e^{-0,032t_i} + y_i)$
0	0,00	22.215,04	1,57
5	68 855,00	22.281,00	− 64,39
10	128 793,00	22.219,30	− 2,69
15	179 714,10	22.176,94	39,67
20	222 374,00	22.222,70	− 6,09
	599 736,10		− 31,93

$u_i\ w_i$	u_i^2	$u_i\ v_i$
12 030,91	58 721 569,00	0,00
−466 937,61	52 587 297,92	499 316 492,05
− 18 243,98	45 997 558,62	873 493 444,95
250 281,20	39 804 490,45	1.133 830 634,02
− 35 657,13	34 281 376,30	1.302 006 441,22
−258 526,61	231 392 292,29	3.808 647 012,24

$v_i w_i$	v_i^2
0,00	0,00
−4 433 573,45	4 741 011 025,00
— 346 453,17	16 587 636 849,00
7 129 258,35	32 297 157 738,81
−1 354 257,66	49 450 195 876,00
994 974,07	103 076 001 488,81

Transcribiendo al Sistema de Ecuaciones (12) se tiene:

$$
\begin{array}{rcl}
-31{,}93 &=& 33.860{,}97b - 599.736{,}10a - 5\ k \\
-25{,}85 &=& 23.139{,}23b - 380.864{,}70a - 3{,}39\ k \\
99{,}50 &=& 380.864{,}70b - 10.307.600{,}15a - 59{,}97\ k
\end{array}
$$

En la segunda y tercera ecuación se colocaron valores abreviados. La solución al sistema da:

$$a = 0{,}000722$$

$$b = -0{,}107996$$

$$k = -833{,}842$$

y el modelo corregido sería

$$y = \frac{21382{,}722}{1 + 1{,}791\, e^{-0{,}033t}}$$

APENDICE

PROGRAMA COMPUTACIONAL

El programa que se presenta a continuación permite calcular los parámetros para la primera y segunda aproximación de la función Logística.

Este programa está escrito en lenguaje de programación BASIC, para la Calculadora Programable CASIO FX 702 P, y fue desarrollado por los ingenieros comerciales en Administración de Empresas, Andrea Madrid Arnaud y Luis Alberto Reyes Santibáñez, de la Universidad de Santiago de Chile.

Estructura del programa

La estructura consta de una rutina principal guardada en la Memoria # 9 y de una subrutina guardada en la Memoria # 8. La rutina principal calcula la primera aproximación y prepara la información para resolver el sistema de ecuaciones de la segunda aproximación. La subrutina resuelve el sistema de 3 ecuaciones, basado en el método expuesto por Leonidas Espina en su publicación "Uso de Calculadoras Sencillas en la Resolución de Sistemas de Ecuaciones". Esta subrutina puede ser utilizada independientemente para resolver sistemas de ecuaciones de N x N, pero para esta calculadora, como máximo de 9 x 9.

A continuación del Programa se muestra un ejemplo de uso, empleando los datos del Anexo VI.

LIST # 9

```
10 VAC
20 INP "Y0, Y1, Y2, H", A0, A1, A2, H
30 E=(A0*(A2-A1))/ (A2*(A1-A0))
40 A=LN (E)/(−H)
50 K=((E-1)*A0*A1)/(A1*E-A0)
60 B = (K/A0)-1
70 PRT "PRA. APROXIMACION"
80 PRT "A ="; A
```

```
 90 PRT "B =";B
100 PRT "K =";K
110 INP "NRO. OBSERVACIONES", N
120 FOR I=1 TON
130 PRT "INGRESE X(";I;") Y(";I;")";:INP X,Y
140 U=Y*(EXP (-A*X))
150 V=X*B*U
160 W=K-(B*Y*EXP (-A*X)+Y)
170 A(1,1)=A(1,1)+U
180 A(1,4)=A(1,4)+W
190 A(1,2)=A(1,2)+V
200 A(2,4)=A(2,4)+U*W
210 A(2,1)=A(2,1)+U↑2
220 A(2,2)=A(2,2)+U*V
230 A(3,4)=A(3,4)+V*W
240 A(3,2)=A(3,2)+V↑2
250 NEXT I
260 A(1,3)=-N
270 A(1,2)=-A(1,2):A(2,2)=-A(2,2)
280 A(2,3)=-A(1,1):A(3,1)=-A(2,2)
290 A(3,2)=-A(3,2):A(3,3)=A(1,2)
300 N=3
310 GSB # 8
320 IF P=0 THEN 370
330 PRT "A =";A+A(2,4)
340 PRT "B =";B+A(1,4)
350 PRT "K =";K+A(3,4)
360 GOTO 380
370 PRT "NO HAY SOLUCION"
380 END.
```

LIST # 8

```
 10 FOR I=1 TO N
 15 P=A(I,I)
 20 IF P≠0 THEN 30
 25 GSB 500
 30 FOR J=1 TO N+1
 40 A(I,J)=A(I,J)/P
 50 NEXT J
 60 FOR J=1 TO N
 70 IF J=1 THEN 110
 75 S=A(J,I)
 80 FOR L=1 TO N+1
 90 A(J,L)=A(J,L) - (S*A(I,L))
100 NEXT L
```

```
110 NEXT J
120 NEXT I
300 P=1; GOTO 410
400 P=O
410 RET
500 P=0
505 IF I+P=N THEN 400
510 P=P+1
520 IF A(I+P,I)≠ 0 THEN 540
530 GOTO 505
540 FOR J=1 TO N+1
550 S=A(I,J)
560 A(I,J)=A(I+P,J)
570 A(I+P,J)=S
580 NEXT J
585 P=A(I,I)
590 RET
```

Ejemplo tipo que muestra como funciona el programa anteriormente expuesto.

```
Y0, Y1, Y2H?
7663
?
9340
?
11104
?
10
PRA · APROXIMACION
A = 0,0320324377
B = 1,899276858
K = 22217.15856
NRO. OBSERVACIONES?
5
INGRESE X(1) Y(1)?
0
?
7663
INGRESE X(2) Y(2)?
5
?
8510
INGRESE X( 3) Y(3)?
10
?
9340
```

```
INGRESE X( 4) Y(4)?
15
?
10196
INGRESE X( 5) Y( 5)?
20
?
11104
A = 0.03283620634
B = 1.777285533
K = 21298.76571
```

BIBLIOGRAFIA

1. Apuntes de clases 1955. Escuela de Economía. Universidad de Chile, Santiago, 108 p.

2. Doerfling, R. 1945. Tratado de Matemáticas para Ingenieros y Técnicos. Ed. Gustavo Gili S.A. Barcelona, España, 666 p.

3. Madrid, Andrea et al. 1982. Métodos Matemáticos y Estadísticos para la Proyección de Ventas. Seminario de Titulación para Ingenieros Comerciales. Facultad de Administración y Economía. Universidad de Santiago.

4. Mattelart, Armand. 1964. Manual de Análisis Demográfico. Ed. Desarrollo Económico y Social de América Latina, DESAL. Santiago de Chile, 622 p.

5. Phillips, H. B. 1945. Ecuaciones Diferenciales. Ed. Hispano Americana UTHEA. México, 175 p.

TITULOS PUBLICADOS DE LA SERIE DE ESTUDIOS ECONOMICOS

Nº	*Título*	*Autor(es)*
1.	Incidencia de la inflación externa en el índice de precios al consumidor en Chile. 1981.	Wally Meza San Martín
2.	Algunas reflexiones acerca del proceso de apertura financiera en Chile. 1981.	Francisco Rosende R.
3.	El patrón de fijación cambiaria: una aproximación empírica. 1981.	Hugo Albornoz P.
4.	Algunos antecedentes básicos sobre la evolución de las importaciones de bienes de capital durante el período 1977-1980. 1981.	Juan C. Corral y Wally Meza San Martín
5.	Evolución de la política cambiaria en el período 1973-1980. 1981.	Wally Meza San Martín
6.	Elementos acerca de la determinación del tipo de cambio efectivo. 1981.	Francisco Rosende R.
7.	Empleo generado por las exportaciones: Chile 1973-1979. 1981.	Verónica Urzúa T.
8.	Política monetaria y tasas de interés: una aproximación empírica. 1981.	Roberto Toso C.
9.	Evolución de la actividad textil, período 1969-1980. 1981.	Manuel Torres Aguirre
10.	El mercado del azúcar. 1982.	Guillermo Jorquera Figueroa
11.	Números índices de comercio exterior: metodología utilizada para la elaboración de los índices de valor unitario y quántum de importaciones y exportaciones. 1982.	Wally Meza San Martín Francisco Pizarro B.
12.	Antecedentes sobre la evolución de la industria automotriz. 1982.	Carlos Godoy Vera
13.	Algunas consideraciones acerca de tasas de interés internacionales. 1982.	Iván Porras P.
14.	Reflexiones sobre apertura financiera. El caso chileno. 1982.	Mario Gutiérrez Urrutia
15.	Política fiscal y cambiaria en economías inflacionarias: consideraciones sobre la experiencia chilena. 1982.	Sergio de la Cuadra F. Francisco Rosende R.

Nº	Título	Autor(es)
16.	Evolución de la política arancelaria: años 1973-1981. 1982.	Cecilia Torres Rojas
17.	Medición del desarrollo financiero chileno (1975-1980). 1982.	Pedro Pablo Vergara B. José Miguel Yrarrázaval E.
18.	Ahorro y crecimiento económico en Chile: una visión del proceso desde 1960 a 1981 y proyecciones de mediano plazo. 1983.	Mario Gutiérrez Urrutia
19.	El tipo de cambio fijo en Chile: la experiencia en el período 1979-1982. 1983.	Roberto Toso C.
20.	Análisis de la economía mundial durante 1982 y perspectiva para 1983	Daniel Fanta de la V. Raimundo Monge Z.
21.	La crisis económica de la década del 30 en Chile.	Roberto Toso C. Alvaro Feller S.
22.	Fluctuaciones de corto plazo de ingresos nominal y real: Comentarios del modelo monetarista de Emil-Maria Claassen.	Eduardo García de la Sierra