

Banco Central de Chile  
Documentos de Trabajo

Central Bank of Chile  
Working Papers

N° 67

Marzo 2000

## **METODOS DE EVALUACION DEL RIESGO PARA PORTAFOLIOS DE INVERSION**

Christian Andrew Johnson

---

La serie de Documentos de Trabajo en versión PDF puede obtenerse gratis en la dirección electrónica: <http://www.bcentral.cl/Estudios/DTBC/doctrab.htm>. Existe la posibilidad de solicitar una copia impresa con un costo de \$500 si es dentro de Chile y US\$12 si es para fuera de Chile. Las solicitudes se pueden hacer por fax: (56-2) 6702231 o a través de correo electrónico: [bcch@condor.bcentral.cl](mailto:bcch@condor.bcentral.cl)

Working Papers in PDF format can be downloaded free of charge from: <http://www.bcentral.cl/Estudios/DTBC/doctrab.htm>. Hard copy versions can be ordered individually for US\$12 per copy (for orders inside Chile the charge is Ch\$500.) Orders can be placed by fax: (56-2) 6702231 or email: [bcch@condor.bcentral.cl](mailto:bcch@condor.bcentral.cl)



**BANCO CENTRAL DE CHILE**

**CENTRAL BANK OF CHILE**

La serie Documentos de Trabajo es una publicación del Banco Central de Chile que divulga los trabajos de investigación económica realizados por profesionales de esta institución o encargados por ella a terceros. El objetivo de la serie es aportar al debate de tópicos relevantes y presentar nuevos enfoques en el análisis de los mismos. La difusión de los Documentos de Trabajo sólo intenta facilitar el intercambio de ideas y dar a conocer investigaciones, con carácter preliminar, para su discusión y comentarios.

La publicación de los Documentos de Trabajo no está sujeta a la aprobación previa de los miembros del Consejo del Banco Central de Chile. Tanto el contenido de los Documentos de Trabajo, como también los análisis y conclusiones que de ellos se deriven, son de exclusiva responsabilidad de su(s) autor(es) y no reflejan necesariamente la opinión del Banco Central de Chile o de sus Consejeros.

The Working Papers series of the Central Bank of Chile disseminates economic research conducted by Central Bank staff or third parties under the sponsorship of the Bank. The purpose of the series is to contribute to the discussion of relevant issues and develop new analytical or empirical approaches in their analysis. The only aim of the Working Papers is to disseminate preliminary research for its discussion and comments.

Publication of Working Papers is not subject to previous approval by the members of the Board of the Central Bank. The views and conclusions presented in the papers are exclusively those of the author(s) and do not necessarily reflect the position of the Central Bank of Chile or of the Board members.

Documentos de Trabajo del Banco Central de Chile  
Working Papers of the Central Bank of Chile  
Huérfanos 1175, primer piso.  
Teléfono: (56-2) 6702475 Fax: (56-2) 6702231

## **METODOS DE EVALUACION DEL RIESGO PARA PORTAFOLIOS DE INVERSION**

Christian Andrew Johnson

Economista Senior  
Gerencia de Análisis Internacional  
Banco Central de Chile

### **Resumen**

El objetivo de este documento es presentar de una manera clara métodos alternativos de evaluación de riesgo para portafolios con múltiples activos. Conceptos como Análisis de Retorno Total, Frontera Eficiente, Valor del Riesgo (VaR), Teoría de Valores Extremos (EVT), Tracking Error y simulaciones de Monte Carlo se aplican a portafolios ficticios.

### **Abstract**

This paper develops alternative methodologies to evaluate multiple assets portfolio risks. Total Return Analysis, Efficient Frontier, Value at Risk (VaR), Extreme Value Theory (EVT), Tracking Error (TE), and Monte Carlo simulations are topics which are applied to a variety of fixed and variable return portfolios.

---

Agradezco los comentarios recibidos en reunión CEMLA en Ecuador, y a participantes del seminario de la División de Estudios del Banco Central de Chile. Lo señalado en el documento no representa necesariamente la opinión del Banco Central de Chile. Email: [cjohnson@condor.bcentral.cl](mailto:cjohnson@condor.bcentral.cl).

## 1. Introducción.

De los últimos treinta premios Nobel que se han entregado en el área de las ciencias económicas, solamente dos de estos premios han sido otorgados a economistas que han focalizado su investigación al área financiera. La investigación de Harry Markowitz, Merton Miller y William Sharpe relacionada con selección óptima de portafolios es premiada en 1990, mientras que los métodos de valoración de derivados de Robert Merton y Myron Scholes les hacen merecedores al premio Nobel en 1997.

El alto nivel de desarrollo cuantitativo que está siendo aplicado al área de las finanzas presenta cierta correlación con estos premios. Antiguamente en el área de las matemáticas financieras bastaba con manipular eficientemente la relación de valor presente para dominar relativamente el área. Actualmente los desafíos son otros. Duración, Convexidad, Deltas, Gammas, Value at Risk, Tracking Error, Razón de Información, Teoría de Valores Extremos, Métodos de Simulación de Monte Carlo, etc., son algunos elementos que se deben manejar al momento de diseñar un portafolio.

El propósito de este documento es presentar de una manera didáctica, y con ejercicios de aplicación programados en Excel y en GAUSS, conceptos que están siendo utilizados en la elección de portafolios de inversión, de manera que puedan ser aplicados, por administradores de portafolios de renta fija y renta variable, como son las administradoras de fondos de inversión (AFPs). Adicionalmente se pueden dimensionar claramente comparadores de manera de evaluar el performance de las posiciones de diversos agentes inversores desde un punto de vista del control financiero, como mecanismos de supervisión bancaria por ejemplo.

Estas metodologías tienen la ventaja de entregar un marco de referencia que permita formalizar la discusión del tema del riesgo en portafolios de inversión, de manera de ampliar el horizonte de evaluación de performance de una cartera considerando criterios de riesgo, adicionalmente a consideraciones de retorno.

## 2. Análisis de Retorno Total.

Existen diversas alternativas para el cálculo del retorno esperado de cierto activo, los cuales deben considerar una proyección del precio del instrumento para el horizonte de inversión deseado. Una proyección tradicional ha sido el considerar que el retorno promedio histórico es un buen estimador del retorno esperado, con lo cual podríamos decir que:

$$E[R] = \frac{1}{T} \cdot \sum_{j=1}^T R_{t-j}$$

Considerando el fenómeno de reversión a la media<sup>1</sup> existente en los retornos, parece ser una buena aproximación, sin embargo es poco realista al ser un resultado estadístico que no incorpora el hecho de que el horizonte de inversión no es T, sino generalmente solo una fracción de T. Puede ser el caso de que el retorno observado de un activo sea del -2%, y que el imponer un retorno histórico del 8% sea muy exagerado. El punto es que el retorno histórico promedio tal como se presenta en la expresión anterior, no toma en consideración la trayectoria que ha seguido el proceso en los últimos períodos.

Una segunda metodología que sí considera la trayectoria que han seguido los retornos, es la estimación de modelos de series de tiempo del tipo ARIMA(p,d,q) o modelos autorregresivos integrados de medias móviles con orden p, d, y q. Económicamente se describen por:

$$\Delta^d r_{t+1} = \delta_0 + \sum_{i=0}^p \varphi_i \cdot \Delta^d r_{t-i} + \sum_{j=0}^q \theta_j \cdot \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_{t+1}$$

donde: p indica el número de rezagos a considerar en la parte autoregresiva del proceso, q indica el número de rezagos de la parte media móvil del proceso, y d indica el número de veces que una variable debe ser diferenciada para que sea estacionaria ( $\Delta$  indica diferencia)<sup>2</sup>. Este mecanismo, si bien es más complejo que usar la media histórica de los retornos, es más preciso pero requiere del manejo de software econométrico especializado<sup>3</sup>.

Una de las herramientas más simples en el diseño de un portafolio de inversión es el análisis de retorno total. Dado que los parámetros a considerar en la elección de una cartera óptima se refieren a valores esperados de retornos y riesgos para distintos activos alternativos, el análisis de retorno total responde a la pregunta de cuál será este retorno esperado, sin considerar explícitamente la dimensión riesgo, para un horizonte de tiempo predefinido (de 1 día o 1 año por ejemplo).

Sea  $p_t$  el precio de un activo en el período t, mientras el flujo asociado a este activo y el monto asociado a la rentabilidad de este flujo se definen  $f_t$  y  $i_t \cdot f_t$ , respectivamente. Estos parámetros permiten definir cuál será el retorno total de invertir en este activo:

$$RT_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} + f_t + i_t \cdot f_t$$

---

<sup>1</sup>Reversión a la Media indica que la serie de retornos presenta un proceso que se desvía "transitoriamente" de un retorno promedio de largo plazo, el cual servirá de atractor de los retornos de corto plazo, y por ende definirá la dinámica de los precios del activo analizado.

<sup>2</sup> El número de rezagos se puede determinar por medio de la metodología de Box y Jenkins de los 70s, o utilizando criterios de información bayesiana (BIC) o de Akaike (AIC), entre otros. El requerimiento de estacionariedad se debe al Teorema de Representación de Wold que establece que todo proceso estacionario se puede representar por un modelo de series de tiempo del tipo AR(p), MA(q), o ARIMA(p,d,q).

<sup>3</sup> Para una revisión de estos modelos de series de tiempo ver Hamilton (1994) y Campbell et al. (1997).

De los tres componentes que explican el retorno de un activo, la variación de precio es el que posee una mayor ponderación, mientras que la menor ponderación corresponde al elemento de retorno asociado a la reinversión de los flujos, resultado que se potencia para horizontes de inversión relativamente breves.

Para cierta clase de activos, como los activos de renta fija, existe una internalización explícita de los flujos en el precio de transacción de los instrumentos, puesto que éstos incorporan proporcionalmente el cupón acumulado a la fecha de transacción. Sin embargo para activos de renta variable la situación es diferente. Es el precio de mercado el que internaliza implícitamente el dividendo futuro descontado, dividendo que a su vez es esperado, lo cual le da la categoría de renta variable al instrumento en cuestión.

Apliquemos este concepto a una cartera de renta fija. Consideremos activos alternativos cuya madurez remanente va de 1 a 10 años. En este caso debemos proyectar los precios de cada categoría de instrumentos e incorporar los retornos incrementales asociados a los cupones y la reinversión de estos. Para efectos de identificación del tramo de la curva a invertir solamente es relevante el efecto cambio de precio, sin embargo si lo que se desea es ir un paso más allá y considerar los retornos esperados como insumo en un análisis de optimización más completo, es necesario considerar todos los componentes del retorno total, para así permitir una comparación insesgada de retornos de distintas economías.

La proyección de los precios para los distintos activos de renta fija puede deducirse de la comparación de la curva de rendimiento esperada con la curva de rendimiento actual, debido a la relación existente entre cambio en rendimientos y variación de precios, dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta p_{t+1}}{p_t} = -D^* \cdot \Delta y_{t+1}$$

Es así como el cambio en los retornos ( $\Delta y$ ) ponderado por la duración modificada ( $D^*$ )<sup>4</sup> permite proyectar el efecto precio para los instrumentos disponibles en el espectro de la curva de rendimiento.

Para fines de exposición se asumirá que la duración es aproximadamente tres cuartos de la madurez remanente, y que el flujo (cupón) y los retornos de la reinversión de este flujo se aproximan al rendimiento actual del instrumento. Con esta simplificación, el índice de retorno total se puede expresar como:

$$RT_{t+1} \cong -D_t^* \cdot \Delta y_{t+1} + y_t$$

Consideremos diez activos alternativos cuya curva de rendimiento está representada en el siguiente cuadro en las filas "Rendimiento t" y "Rendimiento t+1". Obedeciendo a la simplificación de que la duración

---

<sup>4</sup> La duración modificada deflacta a D por el rendimiento bruto (1+y):  $D = \sum_{t=1}^T t \cdot \omega_t = \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot \frac{c_t}{(1+y)^t}}{\sum_{t=1}^T \frac{c_t}{(1+y)^t}} = \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot \frac{c_t}{(1+y)^t}}{P}$

de los distintos activos de renta fija corresponden al 75% de la madurez de cada instrumento, el efecto precio del cambio de rendimiento de 50 puntos base propuesto sería de -3.75% para el papel de 10 años, y de solamente -1.13% para el papel de 3 años. Considerando los cupones y su reinversión el retorno total de cada instrumento se presenta en la fila "Retorno Esperado", y correspondería a cerca de 2% para el papel de 10 años y de 4% para el papel de 3 años, aproximadamente. La comparación de curvas de rendimiento y retornos esperados se presenta en la figura N°1.

Madurez	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curva t	5	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9
Curva t+1	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6	6.1	6.2	6.3	6.4
Duración (Años)	0.75	1.50	2.25	3.00	3.75	4.50	5.25	6.00	6.75	7.50
Retorno Esperado	4.63	4.35	4.08	3.80	3.53	3.25	2.98	2.70	2.43	2.15
Efecto Precio	-0.38	-0.75	-1.13	-1.50	-1.88	-2.25	-2.63	-3.00	-3.38	-3.75

**Cuadro N° 1**

Para fines expositivos se presenta la fórmula presente en la celda de "Retorno Esperado" en el siguiente diagrama:

	A	B	C	D	E
1	Madurez	1	2	3	4
2	Rendimiento t	5	5.1	5.2	5.3
3	Rendimiento t+1	5.5	5.6	5.7	5.8
4	Duración (Años)	0.75	1.50	2.25	3.00
5	Retorno Esperado	4.63	4.35	4.08	3.80
6	Efecto Precio	-0.38	-0.75	-1.13	-1.50

En la figura N°1 se puede visualizar el efecto sobre el retorno de activos alternativos de un incremento de 50 puntos base (0.5%) en la estructura de tasas de interés. Si consideramos el parámetro de retorno como único índice decisivo para realizar una inversión, este indicaría que se deberían invertir en activos de corta madurez, pues son los que reportan mayores retornos. La decisión en este ejercicio de acortar la duración del portafolio se potencia si introducimos penalizaciones por concepto de riesgo, pues no es difícil demostrar que aquellos activos con mayor duración tienen mayor volatilidad en sus precios:

$$\sigma\left(\frac{\Delta p}{P}\right) = D^* \cdot \sigma(\Delta y).$$

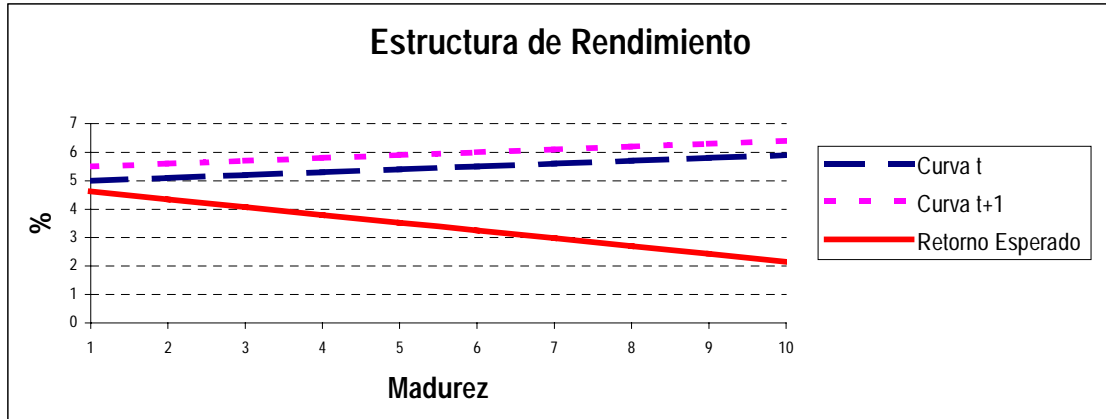


Figura N° 1

Una vez definido el vector de retornos esperados al incluir los supuestos deseados en el movimiento de la estructura de tasas de interés, de acuerdo a la evolución prevista de los fundamentos, debemos especificar la estructura de riesgo del portafolio de manera de generar un espacio de inversiones disponibles. Este concepto conocido como la *frontera eficiente* se revisa en la siguiente sección.

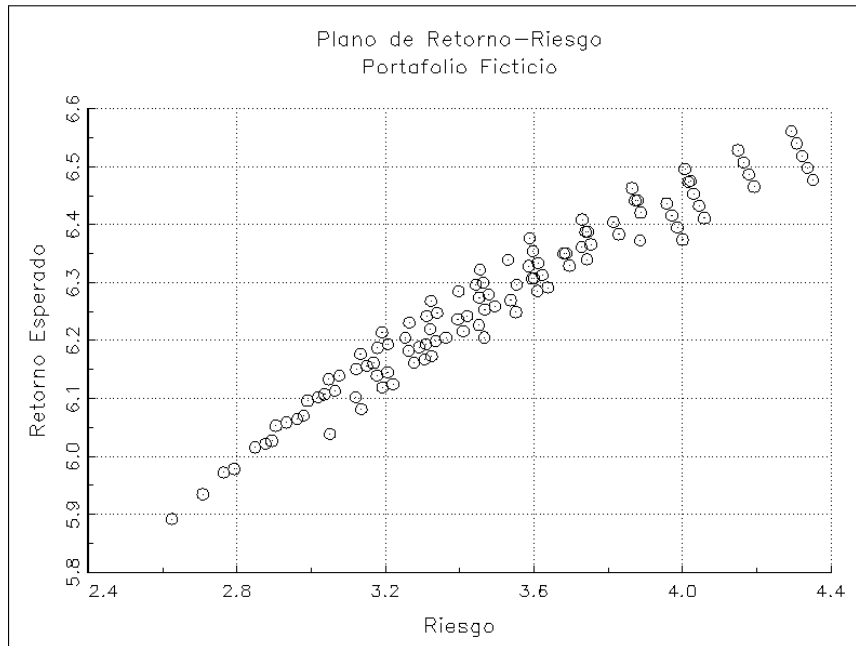
### 3. Determinación de una Frontera Eficiente.

Una Frontera Eficiente define los portafolios factibles (canastas de inversión) que cumplen con el requisito de maximizar retorno para todo nivel de riesgo. En términos matriciales el problema se reduce a:

$$\begin{aligned} \text{Max} E[R_p] &= \omega \cdot E[R] \\ &\{ \omega_1, \dots, \omega_n \} \\ \text{s.a.} \\ \sigma_p &\equiv \omega \cdot E[\Sigma] \cdot \omega = \sigma_0 \\ 0 &\leq \omega_i \leq 1 \\ \omega \cdot \bar{1} &= 1 \end{aligned}$$

Esta especificación nos indica que la frontera eficiente incluye aquellas ponderaciones  $\omega_i$  de los distintos activos  $i$  que cumplan con las condiciones de maximización de retornos para cada nivel de riesgo preestablecido, obedeciendo a que los ponderadores deben sumar 100% y no pueden en forma individual estar fuera del rango del 0% al 100% como porcentaje de inversión.





**Figura N° 2**

Al resolver el problema de maximización propuesto se están escogiendo los puntos que corresponden a la envolvente superior de los alternativos posicionamientos que cumplen con las restricciones del problema. Cada punto de la figura N°2 representa una alternativa de inversión en una cartera ficticia, definiendo la frontera eficiente como la envolvente superior de la nube de puntos.

Según el análisis previo, queda claramente establecido que la relación existente entre retornos esperados y riesgo (desviación estándar) para los distintos portafolios eficientes es directa. Si se desea incrementar los retornos de un portafolio se debe considerar el incremento subyacente en el riesgo del portafolio propuesto. La evidencia muestra que para niveles bajos de riesgo es posible incrementar retornos sin una adición significativa de volatilidad, sin embargo esta relación es cada vez menos válida de manera que llega un momento en que la unidad de retorno adicional genera incrementos en la volatilidad muy por encima de los niveles observados a niveles de retornos bajos. Esta relación se conoce como *Coefficiente de Sharpe*, y define la razón Retorno/Riesgo de portafolios alternativos a lo largo de la frontera eficiente, la cual presenta, empíricamente, una relación normalmente decreciente a lo largo de la frontera eficiente a medida que se exige mayor nivel de retorno a un portafolio.

Tal como se ha discutido en párrafos anteriores, el diseño de una frontera eficiente requiere de dos insumos determinantes. Primero, el vector de retornos esperados, que proviene del análisis de retorno total para todos los activos elegibles de una cartera potencial, y segundo, de la matriz de riesgo, conocida como

la matriz de varianzas y covarianzas de los retornos, la cual tiene diversas alternativas de generación (ver Jorion (1997), Best (1998), y Dowd (1998)).

La visión tradicional es asumir que la matriz de varianzas y covarianzas esperada se puede obtener de los datos históricos directamente. Esta metodología si bien es usual, asume que las características de riesgo históricas persistirán en un futuro, lo cual no necesariamente corresponde, y además, no permite distinguir dos valores estadísticamente similares (como podrían ser 0.96 versus 0.91), con las consecuentes soluciones esquinas que surgen de esta diferencia numérica pero no estadísticamente significativa.

Esta ambigüedad numérica impulsa la adopción de métodos correctivos para la matriz de riesgo. Algebraicamente la matriz de varianzas y covarianzas puede descomponerse en tres matrices:

$$\Sigma_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \dots & \dots \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}_{n \times n} = \Psi \cdot C \cdot \Psi$$

La primera y última matriz ( $\Psi$ ) corresponden a una diagonal de desviaciones estándar, mientras que la matriz C que se ubica entre estas últimas es la matriz simétrica de correlaciones.

La proyección de la matriz de riesgos puede surgir del análisis y proyección de cada matriz que la compone. En lo que se refiere a la matriz diagonal de desviaciones estándar, una alternativa consiste en la estimación econométrica de modelos generalizados autorregresivos de heteroscedasticidad condicionada, GARCH(p,q), los cuales permitirían proyectar cada desviación estándar con determinado margen de error<sup>5</sup>.

Analíticamente un proceso GARCH(p,q) se puede representar por (ver más adelante sección de GARCHs):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \cdot \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i \cdot r_{t-i}^2$$

o para el caso específico de un GARCH(1,1) como<sup>6</sup>:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \cdot r_{t-1}^2$$

Una segunda alternativa considera obtener las volatilidades directamente de valoraciones de mercado por medio de la utilización de opciones sobre los instrumentos que conforman el portafolio potencial. La

<sup>5</sup> Para un análisis en detalle, revisar sección de modelos GARCH.

<sup>6</sup> Ver en la sección de Value at Risk, la representación simplificada del GARCH utilizada por el banco J.P. Morgan.

volatilidad implícita de cada opción asociada a cada instrumento serviría de proxy para definir el vector de desviaciones estándar. Esta última posibilidad ha quedado mas bien como propuesta, puesto que si bien es factible encontrar este vector de volatilidades, en la práctica existen múltiples instrumentos alternativos que hacen dificultosa su elección, lo cual implica incertidumbre en la unicidad de la solución.

La matriz de correlaciones  $C$  no tiene contraparte de mercado al no existir algún instrumento del cual se pueda deducir al menos en forma implícita su valor. Existen básicamente tres alternativas para obtener esta matriz. La más simple corresponde a considerar directamente las correlaciones históricas de los retornos de los activos bajo análisis. Una segunda alternativa consiste en proyectar econométricamente estas correlaciones mediante modelos GARCHs, de manera similar a como se efectuó en el caso de las volatilidades (Jorion (1997)). Finalmente, se puede discretizar la matriz de correlaciones con un grid tan fino como se desee de manera de garantizar las equivalencias estadísticas entre los distintos valores de correlaciones. Este mecanismo consiste en asignar a un punto del grid-unidimensional los valores específicos de las correlaciones, de manera que por ejemplo valores como 0.87 sean aproximados a 0.9 y valores de 0.84 sean aproximados a 0.8. Esta metodología permite evitar estados absorbentes, es decir portafolios con soluciones esquinas muy marcadas, lo cual puede ir en contra de un objetivo de liquidez no explícito en el algoritmo de optimización de portafolio.

Esta metodología depurada del modelo de optimización, permite incrementar la confianza en los resultados finalmente propuestos por un mecanismo de este tipo. La próxima sección utiliza esta metodología para determinar lo que se conoce como portafolio comparador.

#### **4. Definición de un Portafolio Comparador (Benchmark).**

Un portafolio comparador es aquel referente con el cual es evaluada la performance (gestión) de operaciones de inversión efectuadas por un administrador de portafolio.

Debe ser un portafolio neutral "factible" de reproducir, y debe incorporar todas las restricciones institucionales vigentes en la institución inversora. Estas restricciones se incorporan en el proceso de generación de la frontera eficiente, de manera que, si bien es cierto que el área de riesgo-retorno factible se ve disminuido, con la consiguiente reducción en los portafolios factibles a invertir, estamos incluyendo otra dimensión que nos cubre de riesgos que para la institución son importantes y que no son cuantificables en el plano de rentabilidad y riesgo financiero.

## 5. Ejercicio de Optimización para una Cartera Ficticia.

En esta sección se realiza un ejercicio introductorio de optimización considerando un portafolio de tres activos cuyos retornos esperados, volatilidad y correlaciones provienen directamente de los retornos históricos<sup>7</sup>. La evolución semanal de los precios de estos activos se presenta en la figura N°3.

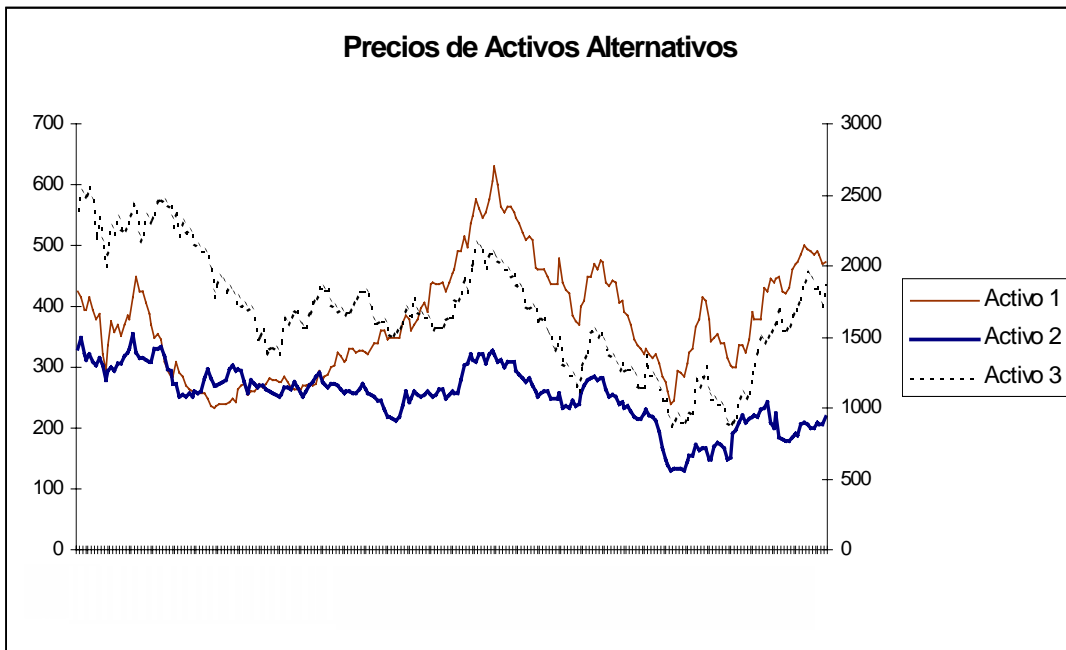


Figura N° 3

Los retornos entre  $t$  y  $t+1$  (semanales en nuestro caso) para cada activo  $i=1, \dots, n$  se obtienen a partir de aplicar la aproximación logarítmica:

$$ret_{t+1}^i = \ln\left(\frac{p_{t+1}^i}{p_t^i}\right) * 100$$

Utilizando las herramientas de Excel, determinamos el valor promedio de los retornos, y la matriz de varianzas y covarianzas correspondientes. Tal como se visualiza en la figura N°4, una vez calculada la matriz de varianzas y covarianzas, y los retornos esperados, se procede a generar un vector de ponderadores que sumen 100% y que definan los montos a invertir de cada activo. En la figura estos ponderadores se ubican en las celdas E255:E257, y la fórmula `MMULT(E246:G246,E255:E257)` de la celda

<sup>7</sup> Un ejercicio considerando discretización de correlaciones y modelos GARCH para la proyección de volatilidades se realizará en las siguientes secciones.

E253 determina el retorno del portafolio propuesto. El riesgo definido como la raíz cuadrada de la varianza del portafolio y presente en la celda E252 se calcula por medio de la fórmula<sup>8</sup>:

$$\text{RAIZ}(\text{MMULT}(\text{TRANSPONER}(\text{E255:E257}), \text{MMULT}(\text{E248:G250}, \text{E255:E257})))$$

que no es nada más que la representación en Excel de la multiplicación  $\omega \cdot \Sigma \cdot \omega$  arriba discutida.

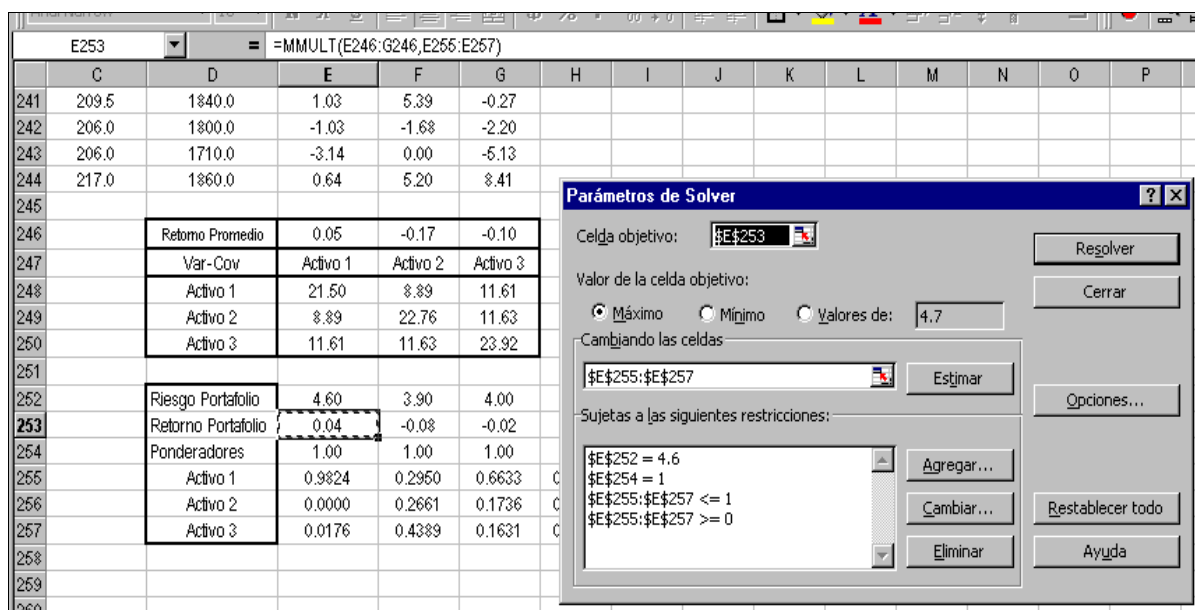
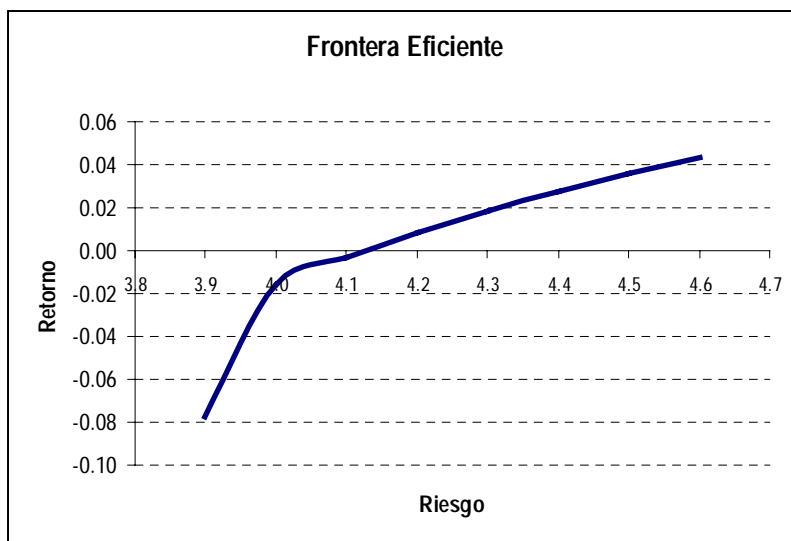


Figura N° 4

Todas las restricciones del problema de optimización se incorporan a la herramienta Solver del Excel. Para definir el punto de partida de la frontera se procede a definir como celda objetivo a E252, cuyo valor debe ser minimizado. Posteriormente se definen las celdas a cambiar como E255:E257, que corresponden a los ponderadores de cada activo del portafolio. Finalmente se agregan las restricciones que consisten en que los ponderadores sumen 1 (E254=1), y que sus valores deben fluctuar entre 0 y 1 (E255:E257 <= 1 , y, E255:E257 >= 0). Una vez incorporadas todas las condiciones del problema se procede a su optimización. Para la determinación de los otros puntos del portafolio se procede a incorporar una restricción adicional que corresponde a los diferentes niveles de riesgo exigidos al portafolio de manera que el algoritmo encuentre los ponderadores que maximice el retorno. En la figura N° 4 se presenta la incorporación de la restricción de que el riesgo debe ser 4.6 (E252=4.6), y se resuelve el algoritmo maximizando la celda objetivo para el retorno E253. Repitiendo este ejercicio para diferentes niveles de retorno permite generar la frontera eficiente que se presenta en la figura N° 5.

<sup>8</sup> La función TRANSPONER se activa al presionar simultáneamente las teclas Ctrl+Shift+Enter.



**Figura N° 5**

De la figura podemos evidenciar la pendiente positiva de la relación retorno-riesgo a lo largo de la frontera eficiente, y la convergencia asintótica a niveles de retorno máximos de 0.5 que corresponde al rendimiento del activo 1.

Si realizamos un ejercicio de optimización con restricciones, como por ejemplo que no se debe permitir que un portafolio posea más de un 50% en un activo, la nueva frontera eficiente estimada estará por debajo de la generada sin restricciones, evidenciando que toda restricción activa nos conduce a un subespacio de menor retorno o mayor riesgo. Sin embargo esta pérdida en la asignación de los recursos financieros es válida en un ambiente de administración de portafolios cuando existe un comparador o cuando se realizan ejercicios de "What if Scenario". Restricciones adicionales al proceso de optimización pueden ser el resultado de algún proceso de optimización o determinación de rangos de variación de parámetros que obedezcan a otros criterios, independientes de los financieros. La siguiente sección explora conceptualmente los riesgos de alejarse en demasía de los puntos centrales de comparadores explícitos o directamente intuitivos.

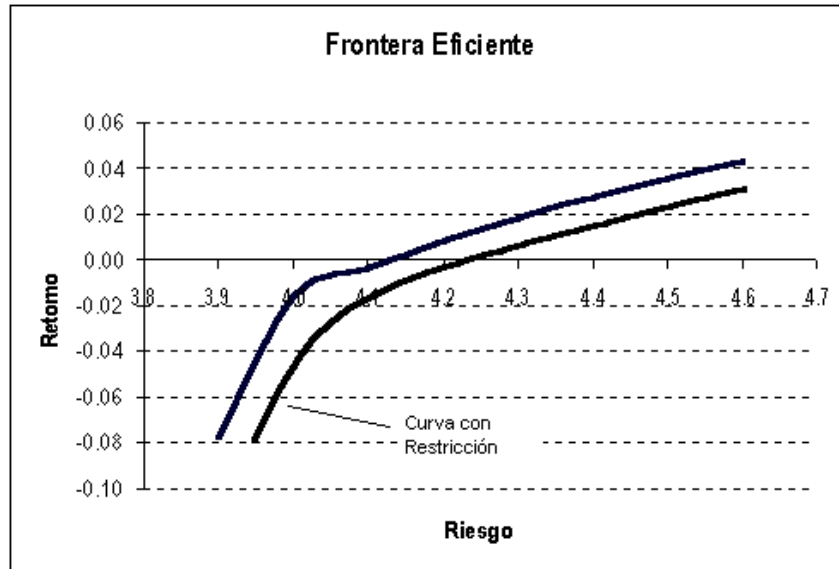


Figura N° 6

## 6. Value at Risk, Tracking Error y Razón de Información.

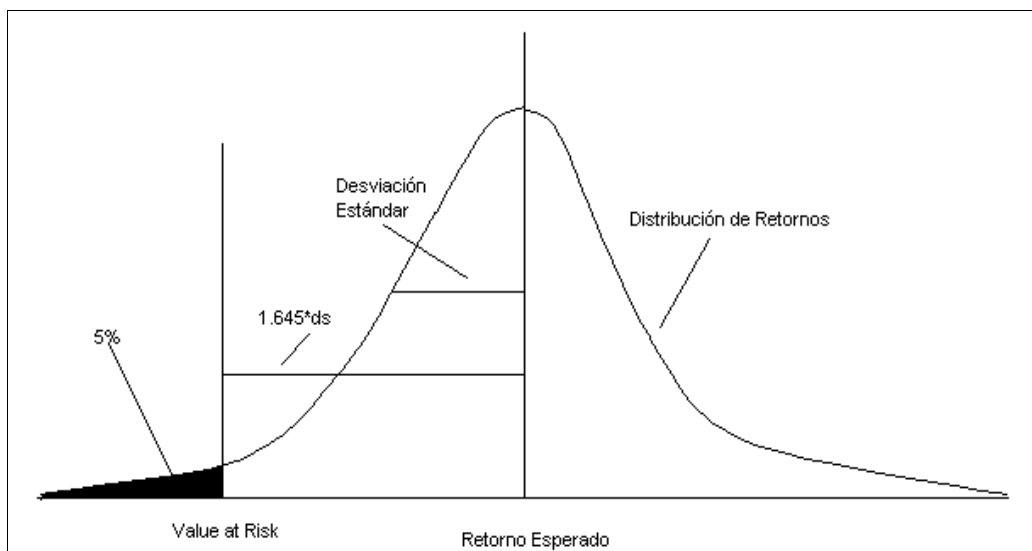
Esta sección revisa conceptos de valoración del riesgo, o volatilidades, ya sea midiendo el riesgo en términos absolutos, como es en el caso del Value at Risk (VaR), o en términos relativos a un portafolio comparador, como es el caso del Tracking Error (TE).

### 6.1. Value at Risk.

El concepto de Value at Risk, o valoración del riesgo, proviene de la necesidad de cuantificar con determinado nivel de significancia o incertidumbre el monto o porcentaje de pérdida que un portafolio enfrentará en un período predefinido de tiempo (Jorion (1997), Best (1998) y Dowd (1998)). Su medición tiene fundamentos estadísticos y el estándar de la industria es calcular el VaR con un nivel de significancia del 5%. Esto significa que solamente el 5% de las veces, o 1 de 20 veces (es decir una vez al mes con datos diarios, o una vez cada 5 meses con datos semanales) el retorno del portafolio caerá mas de lo que señala el VaR.

Si consideramos una serie de retornos históricos de un portafolio que posee un número  $n$  de activos, es factible visualizar la distribución de densidad de aquellos retornos a través del análisis del histograma. Es común encontrar fluctuaciones de retornos en torno a un valor medio que no necesariamente es cero (este concepto en estadística se denomina proceso con reversión a la media) y cuya distribución se aproxima a una normal. Leves asimetrías (skewness) son a veces percibidas en los retornos, pero desde un punto de vista práctico es suficiente asumir simetría en la distribución. Una vez generada la distribución se debe

calcular aquel punto del dominio de la función de densidad que deja un 5% del área en su rango inferior. Este punto en el dominio de la distribución se denomina Value at Risk, y se presenta en la siguiente figura.



**Figura N° 7**

En la medida que deseamos un 5% como área de pérdida, debemos multiplicar a la desviación estándar de la serie de retornos por 1.645. Es decir, si el retorno esperado para un portafolio es de 4% y la desviación estándar es de 2%, entonces el VaR (con un nivel de significancia del 5%) indicará que este portafolio podría sufrir una pérdida superior a  $1.645 \cdot 2 = 3.29\%$  en sus retornos esperados, pasando de 4% a 0.71% o menos, solamente el 5% de las veces (1 de 20 veces).

Existen diversas alternativas para generar la matriz de varianzas y covarianzas con la cual se cuantifica el VaR. Más allá de los procesos GARCHs discutidos, existen metodologías de simulación de retornos que permiten hacer un cálculo estimativo del VaR.

*a. Método Delta-Normal.*

El método más simple de cálculo del VaR es el método delta-normal. Este consiste en asumir que los retornos tienen una distribución normal e idénticamente distribuida de manera que si los retornos esperados para un portafolio de  $n$  activos se definen como:

$$E[R_p] = \omega \cdot E[R]$$

entonces la varianza de este portafolio se representa por:

$$\sigma_p \equiv \omega \cdot E[\Sigma] \cdot \omega$$



donde tal como se revisó en la sección de determinación de la frontera eficiente,  $\omega$  es un vector columna de ponderadores no negativos que suman uno, y  $\Sigma$  define la matriz de varianzas y covarianzas para los retornos de los n activos.

El algoritmo para calcular el VaR partiría definiendo la matriz de varianzas y covarianzas con la base histórica de retornos (se puede incluir alguna valoración de desviaciones estándar por medio de las volatilidades implícitas de opciones). Una vez que se tiene la ponderación de los instrumentos se procede a calcular el VaR para el portafolio especificado considerando un nivel de significancia establecido, de por ejemplo un 5%, lo que implica un ajuste de la volatilidad de 1.645:

$$\text{VaR}_p \equiv 1.645 \cdot \sqrt{\omega' E[\Sigma] \omega} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

El cálculo del VaR va con relación a la frecuencia de la base de datos, lo que hace necesario el ajuste por el parámetro  $\Delta t$ . Si la frecuencia de la base de datos de retornos es diaria y se desea calcular el VaR para 5 días en adelante (una semana) entonces se debe multiplicar por  $\sqrt{5}$ . El siguiente cuadro resume las correcciones que se deben realizar dependiendo del horizonte de análisis para una base de retornos diaria (W es el monto del portafolio en \$):

Estadístico	1 Día	Semana	Mes	Año
Retorno	$\mu_d$	$5 \cdot \mu_d$	$20 \cdot \mu_d$	$240 \cdot \mu_d$
Varianza	$\sigma_d^2$	$5 \cdot \sigma_d^2$	$20 \cdot \sigma_d^2$	$240 \cdot \sigma_d^2$
Desv. Estándar	$\sigma_d$	$\sigma_d \cdot \sqrt{5}$	$\sigma_d \cdot \sqrt{20}$	$\sigma_d \cdot \sqrt{240}$
VaR ( $\alpha = 1.645$ )	$-\alpha \cdot \sigma_d \cdot W$	$-\alpha \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{5} \cdot W$	$-\alpha \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{20} \cdot W$	$-\alpha \cdot \sigma_d \cdot \sqrt{240} \cdot W$

**Cuadro N°2**

Podemos generalizar el cálculo de VaRs para períodos diferentes  $t_1, t_2$  como:

$$\text{VaR}_1 = -\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t_1} \cdot W$$

$$\text{VaR}_2 = -\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t_2} \cdot W$$

de manera que podemos ajustar el VaR para diferentes períodos por:

$$\text{VaR}_2 = -\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t_2} \cdot W = -\alpha \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t_1} \cdot W \cdot \frac{\sqrt{\Delta t_2}}{\sqrt{\Delta t_1}}$$

con lo cual se llega finalmente a:

$$\text{VaR}_2 = \text{VaR}_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\right)}$$

Es decir que si por ejemplo el VaR para un día es de \$20.000, entonces para una semana y un mes será de \$44.721 y \$89.443, respectivamente. Esta metodología de reconversiones se puede utilizar para todos los métodos propuestos en estas secciones.

*b. Método de Simulación Histórica.*

Una segunda alternativa consiste en aplicar el vector de ponderadores de inversión vigentes a una serie representativa de retornos históricos, de manera de generar una secuencia de valores de portafolio que pueden ser representados estadísticamente por un histograma. A partir de esta secuencia de valoración histórica que define una cierta distribución de probabilidades, se procede a calcular el VaR.

La secuencia de retornos se obtiene de multiplicar los ponderadores actuales, representados por el vector columna  $\omega$  con los retornos históricos en cada instante  $\tau$ :

$$R_\tau = \omega \cdot R_{i\tau}$$

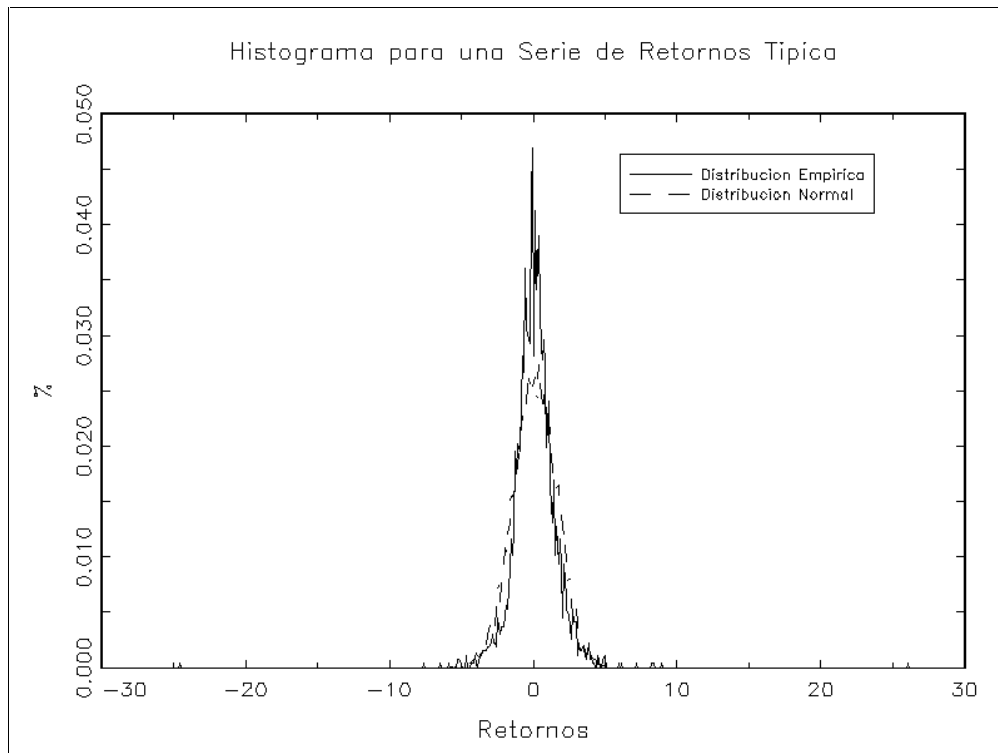
Luego cada uno de estos retornos se utiliza para determinar el valor del portafolio durante el siguiente período, de manera que si consideramos 90 días hacia atrás, entonces tendremos 90 valoraciones de portafolio. Sacando la desviación estándar de las distintas valoraciones del portafolio ( $\sigma_H$ ) podemos hacer el cálculo del VaR mediante la fórmula estándar  $\text{VaR}_H = -\alpha \cdot \sigma_H \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot W$ , para un nivel de significancia del 5% ( $\alpha = 1.645$ ).

La metodología de simulación histórica es equivalente analíticamente al método delta-normal revisado en la sección anterior, a menos que la matriz de varianzas y covarianzas sea alimentada de información proveniente de opciones, donde en cuyo caso se reemplazaría la volatilidad histórica por la volatilidad implícita en las opciones.

*c. Método de Stress-Testing o Método de Situaciones Extremas.*

Es común asumir que los retornos son procesos estocásticos estacionarios que obedecen a una cierta distribución normal. Sin embargo la existencia frecuente de outliers debilita tal supuesto. El método de Stress-Testing incrementa la ponderación de los eventos extremos negativos en la secuencia de valoración del portafolio. Por medio de la recreación de escenarios adversos históricos, o la simple creación de eventos negativos, este método cuantifica los cambios probables en los valores del portafolio.

La figura N°8 permite visualizar la función de distribución para una secuencia de retornos típica (Índice de Precios Selectivo de Acciones de Chile, IPSA). Los outliers y el grado de simetría (skewness) y ancho de colas (leptokurtosis) es una característica ampliamente difundida en la literatura<sup>9</sup>. La distribución empírica muestra un grado de leptokurtosis mayor al presente en la distribución normal. Sin embargo las colas de la distribución son más altas en el caso de la función de densidad empírica. Esto implica que si calculamos un VaR considerando la distribución normal, estaríamos subestimando la pérdida potencial del portafolio, puesto que el área bajo las colas es superior al implícito en la pdf normal.



**Figura N° 8**

En la práctica el análisis de Stress-Testing se puede realizar de diversas formas. Una alternativa puede ser la elección de una secuencia de retornos para un período específico del tiempo que represente según el administrador de portafolio un escenario futuro probable. Es decir que si disponemos de retornos mensuales desde 1990 en adelante, consideremos por ejemplo solamente los períodos en que hubo guerra en el medio oriente, o los períodos de crisis económicas (efectos tequila y crisis asiática, entre otros), o los períodos de grandes fluctuaciones del valor del Yen, o períodos de fuertes correcciones de precios de acciones (crisis

<sup>9</sup> Revisar más adelante la Teoría de Valores Extremos (EVT).

bursátiles), etc. En este contexto, claramente el valor del VaR calculado según las metodologías anteriormente mencionadas subestima las eventuales pérdidas del portafolio vigente.

Una segunda opción es simular eventos adversos que no necesariamente hayan estado presentes en la serie histórica. Este mecanismo se alimenta del análisis simultáneo de un grid multidimensional de diferentes eventos, cada uno de los cuales es ponderado por un vector de probabilidades, dando origen así a un vector de valoraciones de portafolios que permitirán el cálculo del VaR. En la práctica, su implementación se ve limitada a la valoración de eventos discretos, dejando gran parte de los shocks potenciales fuera del análisis. Este análisis de escenarios es incapaz de cubrir todas las posibilidades que pueden hacer disminuir el valor de un portafolio.

Adicionalmente, podemos efectuar un Stress-Testing manipulando la descomposición de la matriz de varianzas y covarianzas en correlaciones y desviaciones estándar. Este ejercicio implicaría modificar los valores que componen la matriz diagonal de desviaciones estándar, como también los valores de la matriz diagonal de correlaciones de retornos entre activos<sup>10</sup>.

Por último, el método de Stress-Testing puede implementarse a través de la Teoría de Valores Extremos (EVT) que consiste en el estudio de las colas de las distribuciones de probabilidad<sup>11</sup>. La no-normalidad de los retornos se ilustra en las figuras siguientes. A un nivel empírico cada vez es más común encontrar aplicaciones a las finanzas que asumen que los retornos se representan por una distribución como la t de student. La ventaja de esta distribución es que presenta colas con mayor masa de probabilidad que la distribución normal, lo cual permite representar mejor a la distribución empírica de los retornos.

La relevancia de los outliers queda de manifiesto en la figura N°9, donde se presentan los retornos semanales de una acción del mercado bursátil chileno (Laboratorios Chile). El primer gráfico de la figura muestra los retornos observados para todo el período, mientras que los gráficos adyacentes presentan los retornos filtrados para distintos márgenes. En la medida que se exige un margen de retorno mayor el número de eventos comienza a disminuir evidenciando la presencia de outliers. Si el margen sube de 2.5% a 5% y a 7% podemos ver que es fuerte la presencia de outliers como porcentaje de la muestra (242 obs): 50.8%, 23.6%, y 12.8% respectivamente. La tabla N°2 presenta un análisis comparativo con el caso de una distribución normal que permite visualizar la no-normalidad de los retornos. En una distribución normal el 33.3% de las observaciones caen fuera de una desviación estándar, mientras que el 5% cae fuera del rango

---

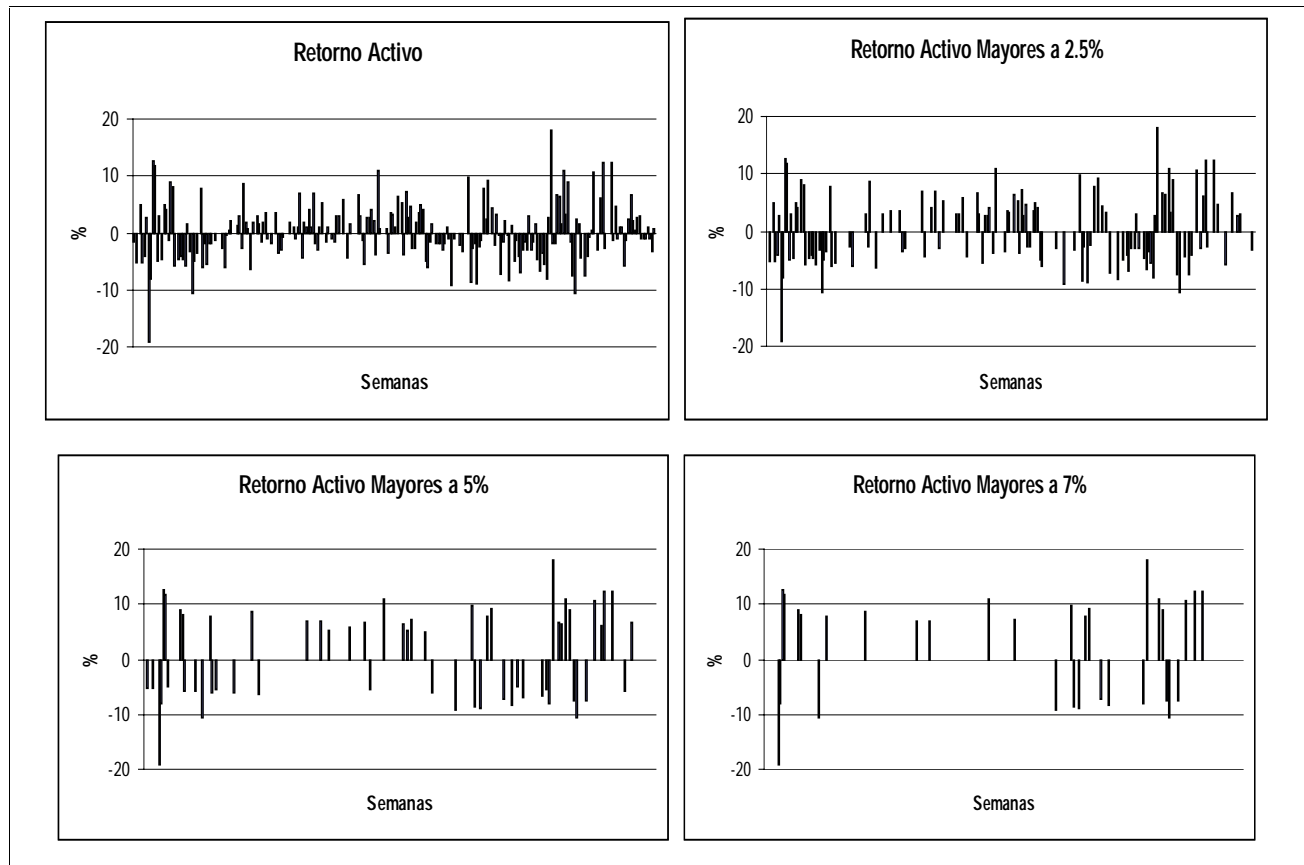
<sup>10</sup> La metodología de mutar la matriz de varianzas y covarianzas a través de modificar las matrices de desviaciones y de correlaciones se puede revisar con detalle en la sección 3.

<sup>11</sup> Ver Danielsson y Vries (1997).

de 1.96 desviaciones estándar. Para la distribución de retornos empírica, estas figuras son 27% y 6% respectivamente, lo cual ilustra la eventual no-normalidad de los retornos<sup>12</sup>.

Margen	PDF Normal	Actual
Una Des. Estándar	33.3%	26.8%
1.96 Des. Estándar	5%	5.8%

**Cuadro N° 3**



**Figura N° 9**

*d. Teoría de Valores Extremos (EVT).*

La teoría de valores extremos estudia, mediante métodos no paramétricos, las colas de una distribución que no necesariamente requiere ser conocida<sup>13</sup>. El parámetro que resume las características (grosor) de la

<sup>12</sup> El test de normalidad de Jarque-Bera para este activo es de 37.4 (p-value de 0) lo cual hace rechazar la hipótesis nula de normalidad de los retornos. El coeficiente de Skewness es de 0.27 y el coeficiente de Kurtosis alcanza a 4.85. Este último estadístico ayuda al rechazo de la nula de normalidad.

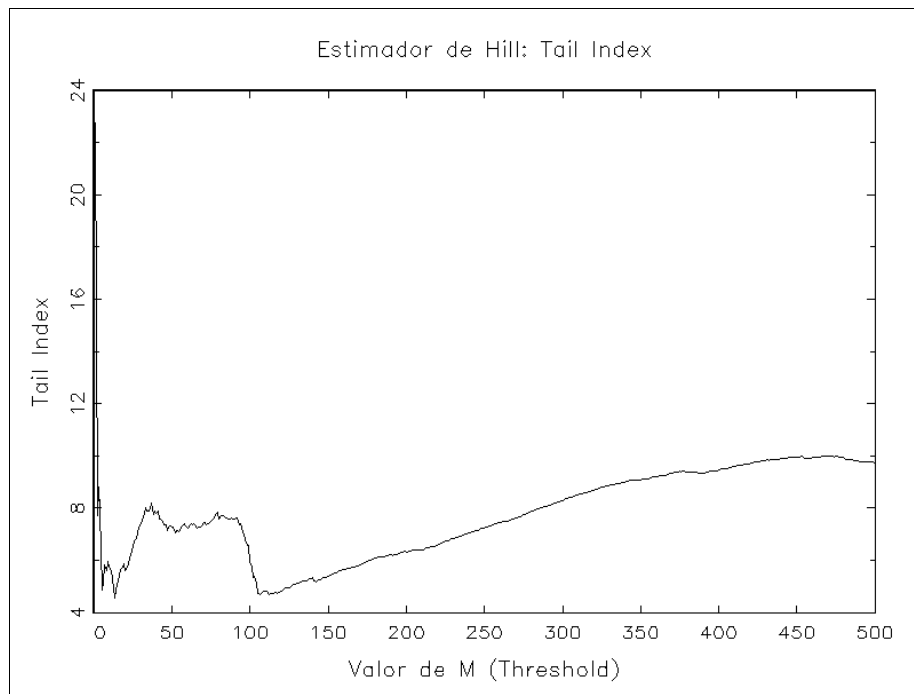
<sup>13</sup> Para una descripción detallada revisar Hols y de Vries (1991), y Danielsson y de Vries (1997).

cola de una distribución es el Tail Index (Índice de Cola), y existen diversos estimadores para este estadístico (ver Hols y Vries (1991)). Hill (1975) propone que el Tail Index se defina por:

$$\hat{\alpha}_H = \left[ \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^M \log(X_i) - \log(X_{M+1}) \right]^{-1}$$

donde  $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq X_{(3)} \geq \dots \geq X_{(M)} \geq \dots X_{(n)}$  son los estadísticos de orden y M es el índice de umbral, según el cual los  $x_i > X_{M+1}$  son utilizados en la estimación del Tail Index. No existe una forma analítica que resuelva el problema de cómo escoger M óptimamente, sin embargo existe una alternativa que sigue un procedimiento heurístico, y que consiste en computar un conjunto de  $\hat{\alpha}_H$  para diferentes índices de umbral, proponiendo escoger M de la región sobre la cual el parámetro  $\hat{\alpha}_H$  presenta relativa estabilidad.

La figura N°10 presenta el estimador de Hill ( $\hat{\alpha}_H$ ) aplicado a una serie de retornos accionarios (Índice Selectivo de Precio de Acciones de Chile IPSA). Lamentablemente en la práctica no es fácil determinar el umbral M pues la función que representa al coeficiente de Hill no es monótonica y presenta múltiples regiones de mesetas.



**Figura N° 10**

En el ejemplo<sup>14</sup> se escogió un  $M=20$ , lo cual entregó un coeficiente de Hill igual a  $\alpha_H = 5.82$ <sup>15</sup>. Los estadísticos de orden fueron la media y la varianza, de manera que efectuando un cálculo de estadísticos secuenciales para los primeros dos momentos (media y varianza) se procede a determinar la estabilidad de la distribución empírica analizada.

La media y la varianza secuencial se utilizan para explorar la estacionariedad débil de la distribución<sup>16</sup>. Las dos primeras ilustraciones de la próxima figura representan los estadísticos secuenciales para los primeros momentos de la distribución del IPSA. Se puede apreciar la estacionariedad de la distribución en lo que respecta a la media, que converge a un valor cercano a 0.18%, y de la varianza, que converge a 2.3% aproximadamente (i.e. una volatilidad de 1.5%). Tal como se muestra en el programa del apéndice 1, la media fue el estadístico utilizado para el cálculo de las probabilidades de los valores extremos de la distribución.

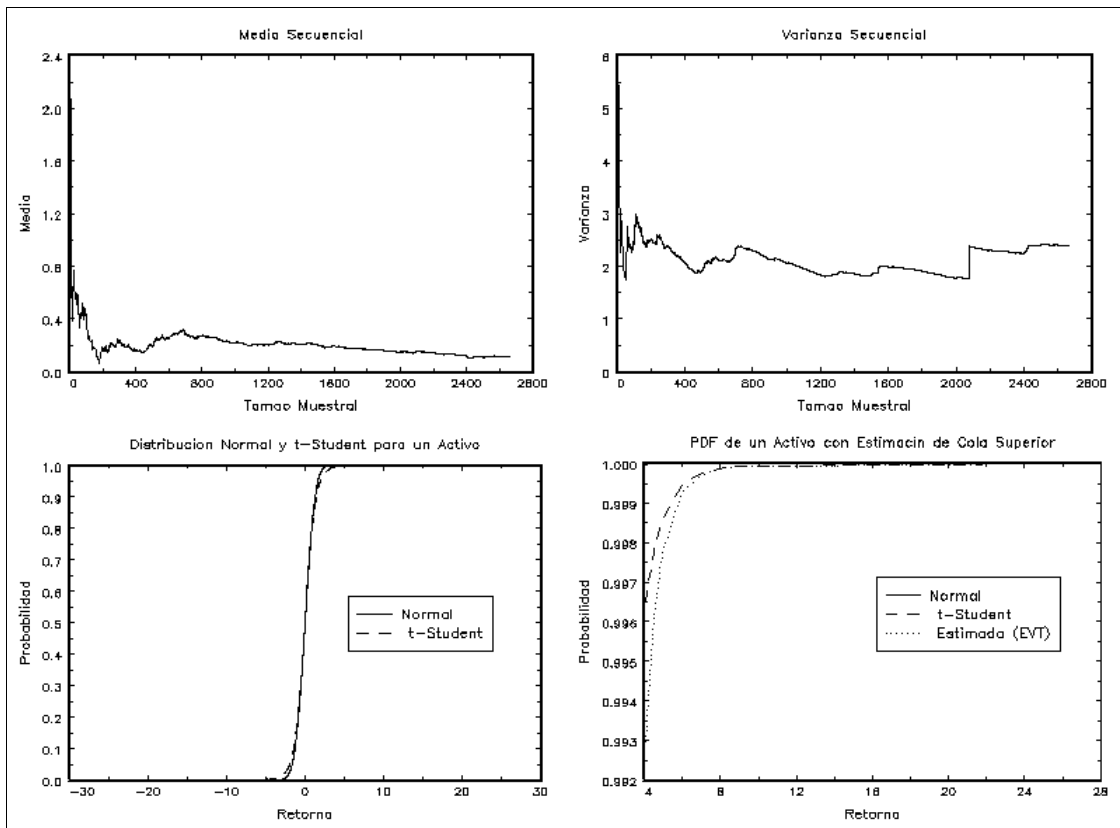


Figura N° 11

<sup>14</sup> Este procedimiento fue programado en GAUSS. El código computacional se presenta en el Apéndice 1.

<sup>15</sup> Hols y De Vries (1991) encuentran  $m=25$  y  $\alpha_H = 3.28$ , para retornos del dólar Canadiense, evidenciando colas anchas.

<sup>16</sup> Estacionariedad débil de una variable aleatoria requiere que la media y la varianza sea estacionaria, y que la función de autocorrelación sea dependiente del horizonte de correlación pero no del momento  $t$  del análisis. Estacionariedad fuerte es un

Utilizando la información de retornos del IPSA se ajustó una distribución normal y una t-student. Tal como es de esperar, la distribución t-student tiene colas más anchas que la función de densidad normal (leptokurtosis), característica tradicional de retornos en mercados financieros, lo cual permite un cálculo menos sesgado del VaR, en comparación al método tradicional de cálculo de multiplicar por 1.645 la desviación estándar de los retornos según el estadístico de la función de distribución de densidad normal. Al utilizar una distribución t-student, el factor de ajuste debiera ser superior a 1.645 si es que el objetivo sigue siendo el de dejar el 5% del área a la izquierda de la distribución.

En los gráficos inferiores de la figura anterior se presenta la estimación de la función de densidad normal y t-student para la serie del IPSA y la estimación utilizando la EVT para la cola superior de la distribución. Es posible visualizar la diferencia y subestimación existente en los modelos estadísticos en lo que se refiere a la potencial pérdida de valor de un activo financiero. La función de distribución normal pondera casi cero los eventos de que el retorno de un activo sea superior (o inferior) al 4%, mientras que la aproximación de la t-student mejora con respecto a esta estimación, ponderando en un mayor porcentaje estos eventos. El cálculo efectuado por la metodología de valores extremos (EVT) es el que mejor captura la forma de la cola de la distribución y reporta un incremento en las probabilidades de ocurrencia de "outliers".

#### *e. Método de Simulaciones de Monte Carlo.*

Una metodología más sofisticada y computador intensiva es la de simulaciones de Monte Carlo. Esta consiste en la generación de múltiples realizaciones para los retornos de un activo (o activos) con un horizonte predefinido, como por ejemplo una semana o un mes. Estas realizaciones deben ser generadas a partir de una función de distribución de probabilidades que represente al proceso estocástico simulado, es decir por ejemplo los retornos simulados para una acción específica deben ser generados de una distribución normal con media 4% y desviación estándar 2%.

Una vez simuladas las diversas trayectorias (usualmente este número es grande, i.e., 5.000 o 10.000 realizaciones) se obtienen los valores del retorno para el horizonte de inversión o análisis preestablecido (5 días o un mes). Con estos 5.000 o 10.000 valores se procede a calcular la desviación estándar del retorno del activo, de manera de generar su VaR.

El procedimiento es bastante directo si el portafolio consiste en un activo. Sin embargo, si la cartera de inversiones está compuesta por  $n$  activos, entonces se debe simular una secuencia de 10.000 realizaciones para cada uno de esos  $n$  activos. Si los instrumentos no están correlacionados entre sí, el ejercicio sería

---

supuesto mucho más estricto y asume estabilidad de la función de distribución completa, y no sólo de los primeros dos momentos, como en el caso de la estacionariedad débil.



simplemente repetir  $n$  veces (una vez por instrumento), el mismo procedimiento que se siguió para el portafolio de un activo. Sin embargo, si las correlaciones entre los instrumentos no son nulas, la simulación de los retornos debe considerar tal covarianza, lo cual complica el procedimiento de generación de procesos estocásticos. Esta extensión metodológica se revisará en una sección posterior.

La generación de procesos estocásticos a través de simulaciones de Monte Carlo es un avance necesario en la medida que se tienen portafolios con instrumentos asimétricos, como por ejemplo Opciones. Si la cartera contiene solamente instrumentos lineales, los resultados del proceso de simulación de Monte Carlo serán equivalentes al resultado del análisis de simulación histórica, o a la metodología de Delta-Normal si no consideramos la volatilidad implícita en las opciones. La ventaja de esta metodología emerge de su flexibilidad para evaluar el riesgo de portafolios cuyos retornos son necesariamente asimétricos, como suele suceder en portafolios que contienen opciones sobre instrumentos o monedas.

## 6.2. Tracking Error y Razón de Información.

Frente a la existencia de un portafolio comparador hace relevante la incorporación de otro concepto de riesgo similar al VaR, pero que guarda relación con el riesgo de distanciarse o aproximarse al portafolio benchmark. Este concepto se conoce como *Tracking error* (TE) y se define como el riesgo incremental de alejarse del portafolio comparador<sup>17</sup>.

Cuantitativamente este concepto de medición del riesgo se define como:

$$TE = \sqrt{(\omega - \omega_{\text{Bench}})^T \Sigma_d \cdot (\omega - \omega_{\text{Bench}})} \cdot \sqrt{240}$$

donde sus componentes se definen como:

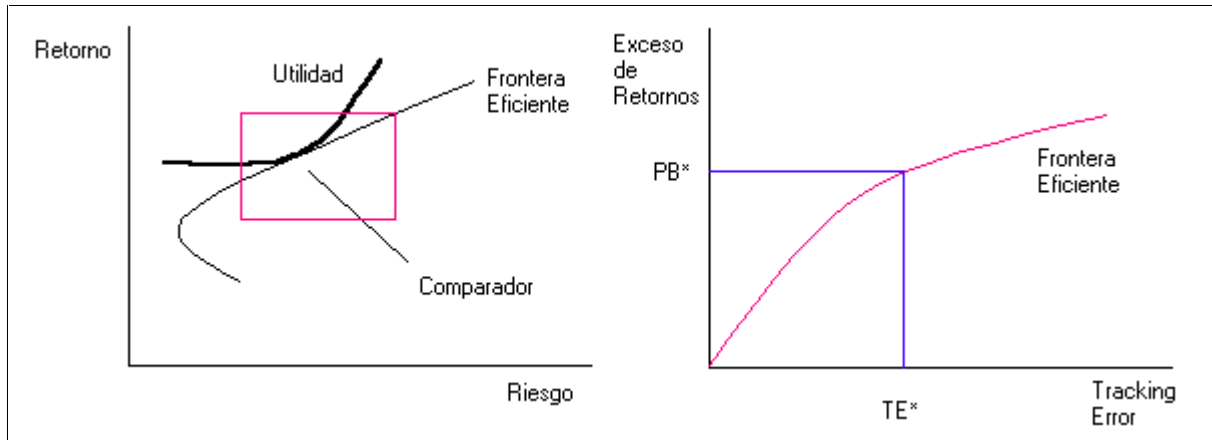
$\omega$  : Vector de Ponderadores del Portafolio de Inversión.

$\omega_{\text{Bench}}$  : Vector de Ponderadores del Portafolio Benchmark (Comparador).

$\Sigma_d$  : Matriz de Varianzas y Covarianzas de los Retornos de los Activos del Portafolio.

La expresión visual de este concepto se deriva de generar un portafolio benchmark a partir de criterios de optimalidad en el plano retorno-riesgo.

Es posible derivar límites de sobre y sub-exposición de portafolios con respecto al comparador, definiendo que el tracking error no supere una cantidad de puntos base predefinida (por ejemplo 100 pb). Es así como ambientes de alta fluctuación de precios implica un incremento de la volatilidad y con esto del tracking error, lo cual desde el punto de vista de la inversión señalaría la necesidad de aproximarse al portafolio comparador, de manera de compensar el incremento de las varianzas propio de la volatilidad del mercado.



**Figura N° 12**

Desde el punto de vista del diseño estratégico del portafolio en relación al comparador, existen diversos criterios alternativos de posicionamiento. Podemos inicialmente asumir que el administrador de portafolio desea obtener 100 puntos bases por sobre el portafolio comparador, pero con un tracking error de no más de 150 puntos base, o alternativamente se puede exigir que se invierta en un portafolio que alcance un tracking error objetivo de 200 puntos base.

Un concepto que combina las dimensiones de retornos y riesgos por sobre el comparador es la razón de información la cual se define como:

$$IR = \frac{R - R_{\text{Bench}}}{TE}$$

Esta figura describe el retorno incremental que se obtiene al posicionarse en un portafolio diferente al comparador, por unidad de riesgo de desviación del comparador. Por ejemplo, al conseguir 75 puntos base de retorno incremental, con un tracking error de 100 puntos base, nos indica una razón de información de 0.75, o del 75% por cada unidad de riesgo marginal.

Este concepto nos permite definir el posicionamiento óptimo de nuestra cartera considerando la relación existente entre los riesgos inherentes de desviarse del portafolio comparador y evaluarlos vis a vis los retornos incrementales esperados

## 7. Análisis Matricial del Value at Risk.

En esta sección se desarrolla con mayor rigurosidad analítica el concepto del Value at Risk, estructura que servirá para efectuar simulaciones de carteras ficticias en secciones posteriores.

<sup>17</sup> Para una comprensión de la generación de un portafolio comparador revisar sección N° 4.

Sabemos que el retorno de un portafolio de dos activos se representa por la combinación lineal o promedio ponderado de los retornos particulares de cada activo:

$$R_p = \omega_1 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot R_2$$

donde la suma de los ponderadores es igual a 1. De aquí se desprende que la varianza de este portafolio se denota por:

$$\begin{aligned} V(R_p) &= V(\omega_1 \cdot R_1 + \omega_2 \cdot R_2) \\ \Rightarrow V(R_p) &= \omega_1^2 \cdot V(R_1) + \omega_2^2 \cdot V(R_2) + 2 \cdot \text{Cov}(R_1, R_2) \end{aligned}$$

Si definimos a las varianzas por  $\sigma_i^2$  y aplicamos la fórmula de covarianza, a la ecuación anterior, llegamos a la expresión:

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

A partir de esta expresión podemos introducir la definición de Value at Risk  $\text{VaR}_p = -\alpha \cdot \sigma_p \cdot W$ , donde  $\alpha, W$  representan al factor de significancia (usualmente 1.645) y el monto total de la inversión medido en unidades monetarias (\$, USD, etc.) respectivamente<sup>18</sup>:

$$\text{VaR}_p = -\alpha \cdot \left[ \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \right]^{1/2} \cdot W$$

Trabajando esta expresión, introduciendo el monto a invertir y el factor de significancia dentro de la raíz:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p &= -\left[ \alpha^2 \cdot \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 \cdot W^2 + \alpha^2 \cdot \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot W^2 + 2 \cdot \rho_{12} \cdot (\alpha \cdot \omega_1 \cdot \sigma_1 \cdot W) \cdot (\alpha \cdot \omega_2 \cdot \sigma_2 \cdot W) \right]^{1/2} \\ \Rightarrow \text{VaR}_p &= -\left[ \text{VaR}_1^2 + \text{VaR}_2^2 + 2 \cdot \rho_{12} \cdot \text{VaR}_1 \cdot \text{VaR}_2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Esta representación del VaR para dos activos puede generalizarse para n activos utilizando formato matricial, tal como se representó en la sección 3:

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} \omega_1 & \dots & \dots & \omega_n \end{bmatrix}_{1 \times n} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \dots & \dots \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \dots \\ \dots \\ \omega_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

lo cual se puede representar resumidamente como:

$$\sigma_p^2 = \omega \cdot \sigma \cdot C \cdot \sigma \cdot \omega' = \omega \cdot \Sigma \cdot \omega'$$

<sup>18</sup> Por simplificación se ha supuesto que  $\Delta t = 1$ .

con  $\Sigma$  como la matriz cuadrada de varianzas y covarianzas de orden n, y  $\omega$  como un vector fila de n ponderadores. Luego al aplicar la definición  $VaR_p = -\alpha \cdot \sigma_p \cdot W$ , llegamos a:

$$VaR_p = -\alpha \cdot W \cdot \sqrt{[\omega \cdot \sigma \cdot C \cdot \sigma \cdot \omega']} = \sqrt{VaR' \cdot C \cdot VaR}$$

donde  $\overline{VaR}$  representa a un vector de 1xn de VaRs individuales para cada activo del portafolio.

Supongamos que para el caso de tres activos el vector de desviación estándar y la matriz de correlaciones se representan respectivamente por:

$$\begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 1 & -0.4 \\ 0.1 & -0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces invertir un tercio en cada activo, para un portafolio total de \$10,000, nos entrega un vector de VaRs correspondientes a cada activo de:

$$VaR = -1.645 \cdot 10,000 \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.2 \\ 0.8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{100} = \begin{bmatrix} 65.80 \\ 120.63 \\ 43.87 \end{bmatrix}$$

de manera que el VaR para el portafolio será de:

$$VaR_p = \sqrt{VaR \cdot C \cdot VaR'} = \sqrt{\begin{bmatrix} 65.80 & 120.63 & 43.87 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 1 & -0.4 \\ 0.1 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 65.80 \\ 120.63 \\ 43.87 \end{bmatrix}} = 177.30$$

que es exactamente equivalente al que resulta de aplicar la ecuación  $VaR_p = -\alpha \cdot W \cdot \sqrt{[\omega \cdot \sigma \cdot C \cdot \sigma \cdot \omega']}$ :

$$VaR_p = -1.645 \cdot 10,000 \cdot \sqrt{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 1 & -0.4 \\ 0.1 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}} \cdot \frac{1}{100} = 177.30$$

Es interesante notar que el VaR del portafolio es inferior a la suma de los VaRs individuales de cada activo, debido a los beneficios de la diversificación.

## 8. Generación de un Intervalo de Confianza para el Value at Risk.

El VaR es un estimador del riesgo del portafolio que toma como insumos a la matriz de varianzas y covarianzas (o su descomposición), el nivel de significancia y el horizonte de medición del riesgo. Este

mecanismo de estimación introduce un grado de imprecisión que puede ser medido a través de un intervalo de confianza.

Consideremos el conocido teorema de Rao (1973):

$$(n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} \mapsto \chi^2_{(n-1)}$$

donde n denota el número de observaciones disponibles, y  $s^2$  la varianza estimada del portafolio.

Consideremos un intervalo de 95%, dejando 2.5% a cada lado del intervalo de la distribución chi-cuadrado. Esto significa que los valores de referencia de la función de distribución serán  $\chi^2_{0.025}, \chi^2_{0.975}$ . Con estos estadísticos y a partir de manipular la expresión de Rao (1973) se puede deducir que:

$$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{0.975}} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{0.025}}$$

Sacando raíz cuadrada y multiplicando por  $-\alpha \cdot W$  llegamos a la expresión:

$$-\alpha \cdot W \cdot \sqrt{\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{0.025}}} < -\alpha \cdot W \cdot \sigma < -\alpha \cdot W \cdot \sqrt{\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{0.975}}}$$

donde la expresión que se presenta al medio de la ecuación corresponde al VaR del portafolio.

Considerando el ejemplo anterior en que el VaR fue de 177.30, el intervalo de confianza para este estadístico sería (asumamos una base de datos de 300, es decir  $n=300$ )<sup>19</sup>:

$$-1.645 \cdot 10,000 \cdot \sqrt{\frac{(299) \cdot 1.1617}{252.99}} \cdot \frac{1}{100} < \text{VaR}_p < -1.645 \cdot 10,000 \cdot \sqrt{\frac{(299) \cdot 1.1617}{348.79}} \cdot \frac{1}{100}$$

es decir,

$$-192.75 < \text{VaR}_p < -164.16$$

Luego podemos decir que el VaR calculado de -177.30 estará en un 95% de las veces entre los valores estimados -192.75 y -164.16.

## 9. Descomposición Triangular del Value at Risk.

En esta sección se presenta una visión geometrizada del riesgo, a partir del teorema general de Pitágoras, conocido como la Ley del Coseno<sup>20</sup>, y que permite tener una visualización de los componentes

<sup>19</sup> La instrucción en GAUSS para obtener los valores críticos de la distribución Chi-cuadrado es `cdfchii(0.025,299)` y `cdfchii(0.975,299)`.

<sup>20</sup> Ver Mautser y Rosen (1999).

del riesgo de un portafolio de inversión. Si bien es un t3pico que escapa de las tecnolog3as tradicionales, ayuda a tener una visi3n del riesgo desde otro punto de vista metodol3gico.

Consideremos un portafolio de dos activos cuya varianza puede ser representada por:

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

La ley del Coseno nos indica que para un tri3ngulo de lados A, B, y C:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2 \cdot B \cdot C \cdot \cos(\theta)$$

donde  $\theta$  es el 3ngulo que forman los lado A y B del tri3ngulo<sup>21</sup>. Gr3ficamente se puede representar como:

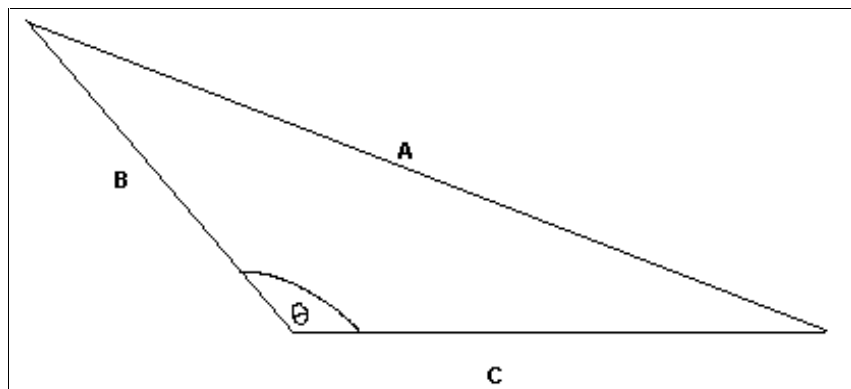


Figura N3 13

Si aplic3ramos esta descomposici3n triangular a la volatilidad  $\sigma_p^2$  se tiene que para:

$$A = \sigma_p$$

$$B = \omega_1 \cdot \sigma_1$$

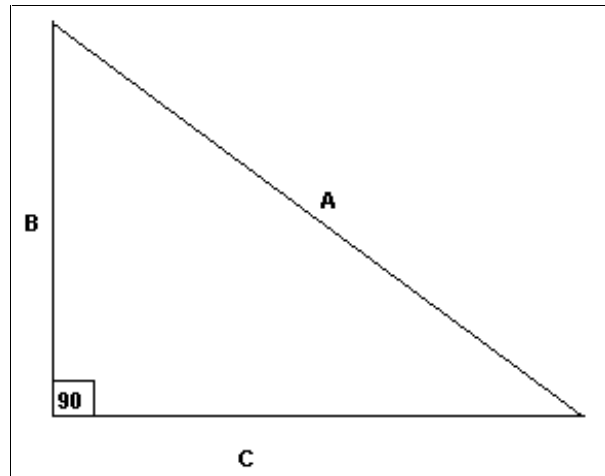
$$C = \omega_2 \cdot \sigma_2$$

$$\Rightarrow \sigma_p^2 = \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2 - 2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \cos(\theta)$$

con lo cual se puede deducir que  $\cos(\theta) = -\rho_{12}$ .

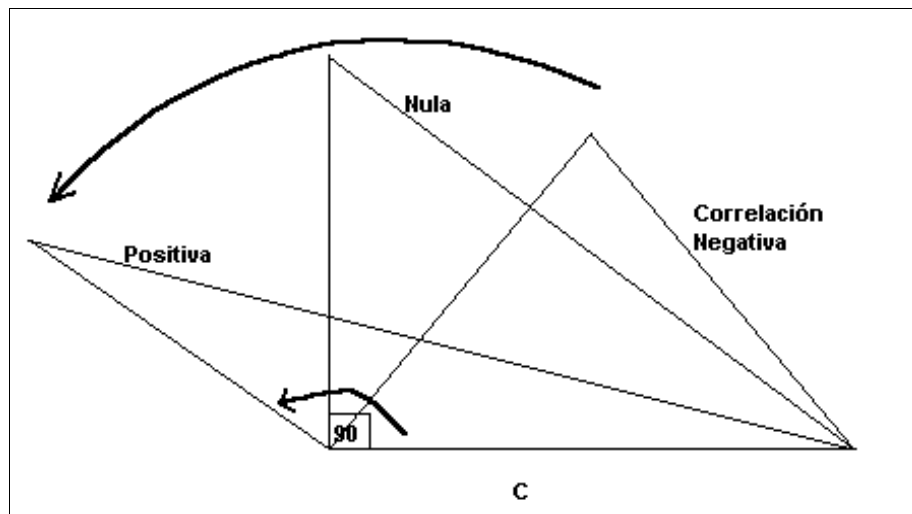
Para visualizar la aplicabilidad de esta metodolog3a consideremos un caso extremo. Asumamos correlaci3n nula entre los dos activos. En este escenario,  $\rho_{12} = 0$ , con lo cual  $\cos(90) = 0$ , de manera que la figura N3 13 se transforma en un tri3ngulo de 3ngulo recto donde  $A^2 = \sigma_p^2 = \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2$ :

<sup>21</sup> Recordar que  $\cos(\pi \cdot 0) = \cos(0) = 1$ ,  $\cos(\pi/2) = \cos(90) = 0$ ,  $\cos(\pi) = \cos(180) = -1$ ,  $\cos(3/2 \cdot \pi) = \cos(270) = 0$ , y  $\cos(2 \cdot \pi) = \cos(360) = 1$ .



**Figura N° 14**

La generalización para diferentes grados de correlación entre activos se puede visualizar en la siguiente figura. En la medida que el ángulo relevante se incrementa desde valores inferiores a 90 grados a valores superiores a 90 grados (es decir de activos con correlaciones negativas a activos cuyos retornos tienen correlaciones positivas), es posible ver el incremento en la volatilidad del portafolio resultante, asumiendo que los ponderadores de inversión se mantienen constantes.



**Figura N° 15**

Esta metodología se puede extender para el caso de n activos, donde el concepto de interés son los VaRs de portafolios alternativos. Inicialmente consideremos dos activos, cuyo riesgo puede ser particionado por medio de la descomposición triangular arriba mencionada:

$$\text{VaR}_1 = -\alpha \cdot W \cdot \sigma_1$$

$$\text{VaR}_2 = -\alpha \cdot W \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

Multiplicando la última expresión por  $(-\alpha \cdot W)^2$  llegamos a:

$$\alpha^2 \cdot W^2 \cdot \sigma_p^2 = \alpha^2 \cdot W^2 \cdot \omega_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \alpha^2 \cdot W^2 \cdot \omega_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \alpha \cdot W \cdot \omega_1 \cdot \sigma_1 \cdot \omega_2 \cdot \alpha \cdot W \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}$$

que no es nada más que la descomposición triangular del VaR para un portafolio de dos activos:

$$VaR_p^2 = VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2 \cdot VaR_1 \cdot VaR_2 \cdot \rho_{12}$$

Si consideramos incrementar la posición en \$ del activo 2, la situación de riesgo del portafolio se verá modificada en función del valor del coeficiente de correlación que este activo presenta con relación al activo alternativo. Para el caso en que la correlación de los retornos sea positiva, entonces el incremento del monto a invertir en el activo en cuestión genera un incremento en el riesgo del portafolio, sin embargo si el coeficiente de correlación es negativo esta monotonicidad ya no es válida.

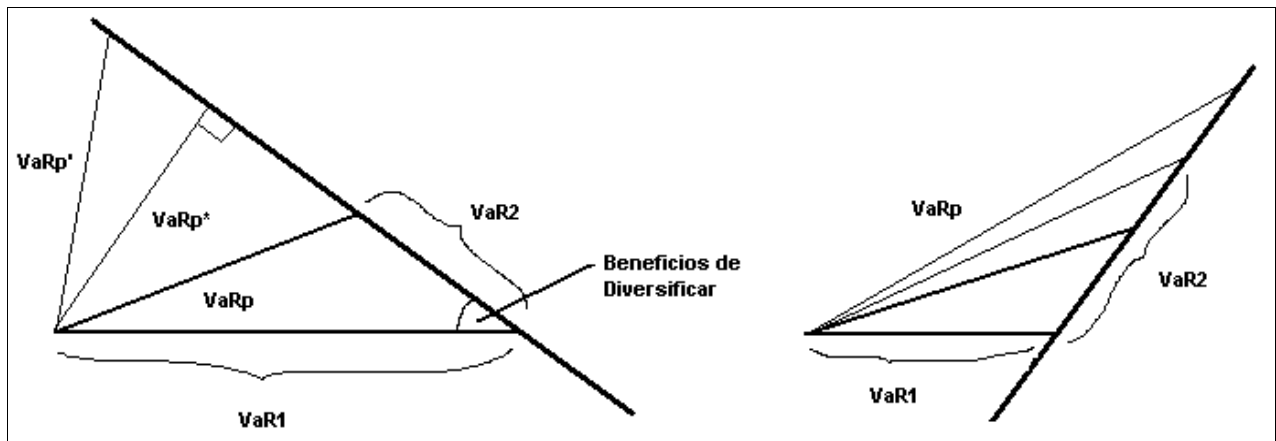


Figura N° 16

Tal como se aprecia en la figura anterior, en la medida que incremento el monto invertido en el activo 2, mi perfil de riesgo cambia de manera ambigua dependiendo de si el coeficiente de correlación de retornos entre activos es positivo o negativo. Para el caso de un coeficiente positivo el incremento en el VaR del portafolio es proporcional al monto invertido en este activo, sin embargo si el coeficiente de retorno es negativo, no existe tal relación monótonica. Es posible demostrar que existe un punto de inversión en el cual el monto del VaR del portafolio se minimiza, y corresponde al punto en el cual el VaR del portafolio es ortogonal a la trayectoria del VaR del activo 2. En la figura N°16 este punto se representa en el diagrama izquierdo en el punto de corte perpendicular del VaR2, cuando se forma un ángulo recto. Este sería el monto óptimo a invertir en el activo 2 si es que mis preferencias tienen como objetivo el disminuir el VaR del portafolio (VaRp\*).



## 10. Modelos GARCH para Proyectar Volatilidades: Teoría y Práctica.

Existen formas a partir de modelos econométricos para proyectar las volatilidades de un activo. Los modelos ampliamente difundidos corresponden a los desarrollados por Bollerslev (1986) denominados modelos Generalizados Autoregresivos de Heteroscedasticidad Condicionada (GARCH), que fueron la generalización a los modelos Autoregresivos de Heteroscedasticidad Condicionada (ARCH) desarrollados por Engle (1982).

Los modelos GARCH(p,d) se pueden representar por:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \cdot \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i \cdot r_{t-i}^2$$

donde p indica el número de coeficientes GARCHs y q el número de coeficientes Arcas. El método de estimación utilizado para este tipo de modelos es el método de máxima verosimilitud, el cual consiste en encontrar los parámetros que permitan maximizar la función de densidad conjunta de la data, de manera de maximizar la probabilidad de que la función de densidad considerada replique las observaciones. Diversos son los paquetes econométricos que hoy en día permiten efectuar esta estimación.

En la práctica, la exigencia de requerir de la estimación de los coeficientes del modelo GARCH se ve resuelto por la aproximación implementada y popularizada por el informe FourFifteen (4:15) del RiskMetrics-JPMorgan. Esta institución, después de experimentar con diversos modelos consideró que minimizaría la pérdida de realidad en la estimación del riesgo de un activo si ponderaba por  $\lambda$  al rezago de la desviación estándar y  $(1 - \lambda)$  al rezago del cuadrado de los retornos del activo. Es decir:

$$\sigma_t^2 = \lambda \cdot \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) \cdot r_{t-1}^2$$

donde  $\lambda = 0.94$  si son datos de retornos diarios, y  $\lambda = 0.97$  si son datos mensuales<sup>22</sup>.

Para visualizar el concepto, consideremos un activo como el peso chileno. Esta moneda se presenta en unidades de pesos por dólar americano (\$/USD). Estimamos un GARCH(1,1) para los retornos diarios del peso chileno, entregando en Eviews el resultado de la figura siguiente.

---

<sup>22</sup> Nótese la falta de constante.

Equation: EQ1 Workfile: GARCHCLP									
View	Procs	Objects	Print	Name	Freeze	Estimate	Forecast	Stats	Resids
ARCH // Dependent Variable is RCLP									
Date: 09/08/99 Time: 13:12									
Sample[adjusted]: 3 1192									
Included observations: 1190 after adjusting endpoints									
Convergence achieved after 50 iterations									
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.					
C	-0.002680	0.007493	-0.357667	0.7207					
RCLP(-1)	0.009533	0.036193	0.263397	0.7923					
Variance Equation									
C	0.003331	0.000379	8.795954	0.0000					
ARCH(1)	0.203736	0.013769	14.79722	0.0000					
GARCH(1)	0.807909	0.009575	84.37603	0.0000					
R-squared	-0.003345	Mean dependent var	0.021838						
Adjusted R-squared	-0.006732	S.D. dependent var	0.371866						
S.E. of regression	0.373115	Akaike info criterion	-1.967542						
Sum squared resid	164.9699	Schwarz criterion	-1.946191						
Log likelihood	-342.7306	Durbin-Watson stat	1.899904						

Figura N° 18

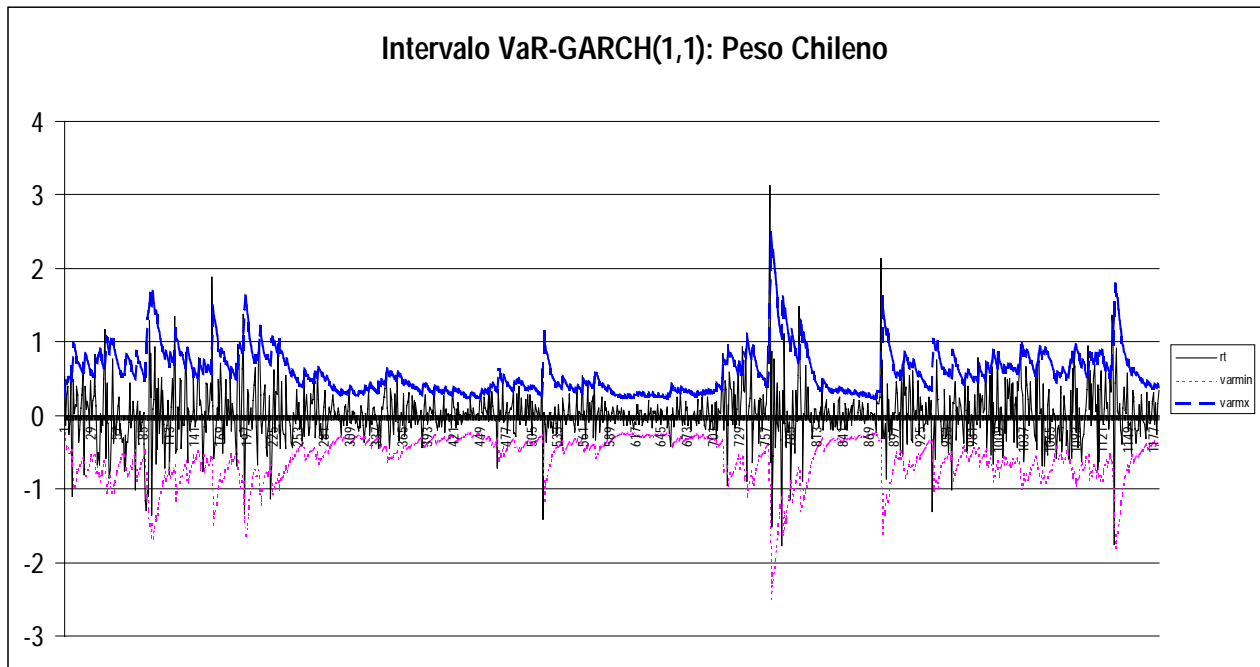
De esta estimación queda claro que el proceso que gobierna a la varianza será:

$$\sigma_t^2 = 0.003331 + 0.807909 \cdot \sigma_{t-1}^2 + 0.203736 \cdot r_{t-1}^2$$

de manera que estamos en condiciones de generar los intervalos de VaR generados a partir del GARCH estimado para el proceso del Peso chileno. La figura N°19 representa tal intervalo, mientras que el cuadro siguiente presenta la forma de inclusión y simulación de las volatilidades a partir del modelo estimado econométricamente.

D8 = =RAIZ(\$C\$1+\$C\$2*C7^2+\$C\$3*D7^2)							
	A	B	C	D	E	F	G
1		<b>C</b>	<b>0.003331</b>	<b>Modelo</b>			
2		<b>ARCH(1)</b>	<b>0.203736</b>	<b>C</b>	<b>-0.00268</b>		
3		<b>GARCH(1)</b>	<b>0.807909</b>	<b>RCLP(-1)</b>	<b>0.009533</b>		
4							
5	Date	clp					
6	Ene 2, 1995	402.92	Retorno	<b>sd</b>		2.86%	
7	Ene 3, 1995	401.69	-0.31	0			<b>Peso</b>
8	Ene 4, 1995	403.81	0.53	0.1496	-0.1495842		<b>403.81</b>
9	Ene 5, 1995	403.27	-0.13	0.2790	-0.2790325		<b>403.27</b>
10	Ene 6, 1995	404.40	0.28	0.2644	-0.2643527		<b>404.40</b>
11	Ene 9, 1995	406.03	0.40	0.2752	-0.275212		<b>406.03</b>

Cuadro N° 4



**Figura N° 19**

La cota superior del intervalo se genera de multiplicar la desviación estándar generada por el GARCH(1,1) por 1.645, mientras que la cota inferior se genera de multiplicar esta misma desviación estándar por  $-1.645$ , garantizando que si el modelo está bien estimado, la trayectoria de los retornos diarios del peso ( $rt$ ) estaría un 90% de las veces entre dichos intervalos.

Más allá del interés econométrico del cálculo preciso del VaR para un activo, está la interpretación para fines de elección de carteras y fijación de límites de riesgo. Por ejemplo podría considerarse como un activo de alto riesgo aquel que presente un VaR superior al 1% con lo cual si el VaR proyectado supera dicho monto, se debe percutar una adecuación del portafolio de manera de compensar tal exposición, o simplemente, se debe optar por salir de estas posiciones riesgosas.

### **11. Simulaciones de Monte Carlo para el Cálculo del Value at Risk.**

En esta sección se profundiza en la metodología de cálculo del VaR a partir de simulaciones Monte Carlo. En este contexto se estima el VaR para un portafolio con un activo, y se extiende la metodología para el caso portafolios con  $n$  activos (Jorion (1997), Best(1998), Dowd (1998)).

La idea consiste en generar secuencias futuras de precios de activos, que preserven las características históricas de correlación y volatilidad (lo cual se garantiza al utilizar una descomposición de Choleski), de manera de comparar, para un horizonte predefinido, los retornos conseguidos para cada activo y así para el portafolio. Al efectuar esta operación muchas veces (10,000 por ejemplo) es posible generar un vector de

10,000 retornos de portafolio, lo cual nos permite obtener un número equivalente de medidas de riesgo VaR. Es ésta la distribución que nos interesa, de manera que se estudian los primeros momentos como la media y la desviación estándar de la distribución de los VaR simulados, lo cual nos permite obtener una mejor visión del riesgo del portafolio escogido. A continuación se desarrolla esta metodología considerando un activo, tres activos cuyos retornos son absolutamente independientes, y finalmente el caso de tres activos cuyos retornos presentan correlaciones históricas que nos interesa preservar en las simulaciones futuras de precios.

### 11.1. Caso de Un Activo.

El precio de un activo en tiempo continuo puede representarse por:

$$dp_t = \sigma \cdot d\xi_t$$

donde  $\sigma$  representa al parámetro de volatilidad conocido y  $\xi \xrightarrow{iid} N(0,1)$ . Discretizando para el caso en que  $\Delta t$  se refiere a un minuto o un día ( $\Delta t = 1$ ), podemos representar la versión discreta de la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned} \Delta p_t &= \sigma \cdot \Delta \xi_t = \sigma \cdot \xi_t \cdot \Delta t = \sigma \cdot \xi_t \\ p_t &= p_{t-1} + \sigma \cdot \xi_t \end{aligned}$$

Recursivamente hacia atrás es posible deducir que:

$$p_T = p_{t-1} + \sigma \cdot \sum_{s=t}^T \xi_s$$

de manera que para generar un vector de J precios para un activo (y por ende retornos) para un horizonte T, debo generar J secuencias de largo T para  $\xi_s$ . Gráficamente este procedimiento se presenta como:

$$\begin{array}{l} \xi_t^{(1)}, \xi_{t+1}^{(1)}, \xi_{t+2}^{(1)}, \dots, \xi_T^{(1)} \\ \xi_t^{(2)}, \xi_{t+1}^{(2)}, \xi_{t+2}^{(2)}, \dots, \xi_T^{(2)} \\ \dots \\ \xi_t^{(J)}, \xi_{t+1}^{(J)}, \xi_{t+2}^{(J)}, \dots, \xi_T^{(J)} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} p_T^{(1)} \\ p_T^{(2)} \\ \dots \\ p_T^{(J)} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} r_T^{(1)} \\ r_T^{(2)} \\ \dots \\ r_T^{(T)} \end{array} \Rightarrow \text{Histograma}$$

A partir de este histograma es posible generar un vector de riquezas alternativas con un horizonte T, de manera de poder calcular el VaR de este portafolio.

### 11.2. Portafolio con n Activos: Descomposición de Choleski.

Consideremos ahora la situación de un portafolio que posee n activos pero que ninguno presenta correlación de retornos entre ellos. Esta caricatura de la realidad no es más que una extensión lineal de lo que se presentó anteriormente. El diagrama de simulación corresponde a:

$$\left. \begin{array}{l} p_{1t} = p_{1t-1} + \sigma_1 \cdot \xi_{1t} \\ p_{2t} = p_{2t-1} + \sigma_2 \cdot \xi_{2t} \\ \dots \\ p_{nt} = p_{nt-1} + \sigma_n \cdot \xi_{nt} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Matricialmente}} \begin{bmatrix} p_{1t} \\ p_{2t} \\ \dots \\ p_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1t-1} \\ p_{2t-1} \\ \dots \\ p_{nt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \\ \dots \\ \xi_{nt} \end{bmatrix}$$

donde las variables para cada activo heredan las características del modelo que se presentó en la sección anterior. La generación de múltiples trayectorias de precios para cada activo sigue el mismo procedimiento ya presentado, puesto que no se ha incorporado ningún supuesto de correlación entre activos.

En la práctica es necesario considerar las correlaciones existentes entre activos. Supongamos que el portafolio consiste de  $n$  activos correlacionados cuyo perfil de precios puede reflejarse en el siguiente diagrama:

$$\left. \begin{array}{l} p_{1t} = p_{1t-1} + \phi_{11} \cdot \xi_{1t} + \phi_{12} \cdot \xi_{2t} + \dots \\ p_{2t} = p_{2t-1} + \phi_{21} \cdot \xi_{1t} + \phi_{22} \cdot \xi_{2t} + \dots \\ \dots \\ p_{nt} = p_{nt-1} + \phi_{n1} \cdot \xi_{1t} + \phi_{n2} \cdot \xi_{2t} + \dots \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Matricialmente}} \begin{bmatrix} p_{1t} \\ p_{2t} \\ \dots \\ p_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1t-1} \\ p_{2t-1} \\ \dots \\ p_{nt-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \\ \dots \\ \xi_{nt} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta p_{1t} \\ \Delta p_{2t} \\ \dots \\ \Delta p_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_{1t} \\ \xi_{2t} \\ \dots \\ \xi_{nt} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta P_{(nx1)} = \Phi_{(n \times n)} \cdot \Gamma_{(nx1)}$$

Tal como se demostrará la matriz cuadrada  $\Phi$  no corresponde a la matriz de varianzas y covarianzas, de manera que debemos utilizar alguna metodología de descomposición de matrices para generarla. El procedimiento consiste en utilizar la matriz de varianzas y covarianzas y la descomposición de Choleski para generar la matriz  $\Phi$ .

Sabemos que  $\Delta P = \Phi \cdot \Gamma$ , de manera que al multiplicar por la transpuesta se obtiene:

$$\Delta P \cdot \Delta P' = \Phi \cdot \Gamma \cdot \Gamma' \cdot \Phi'$$

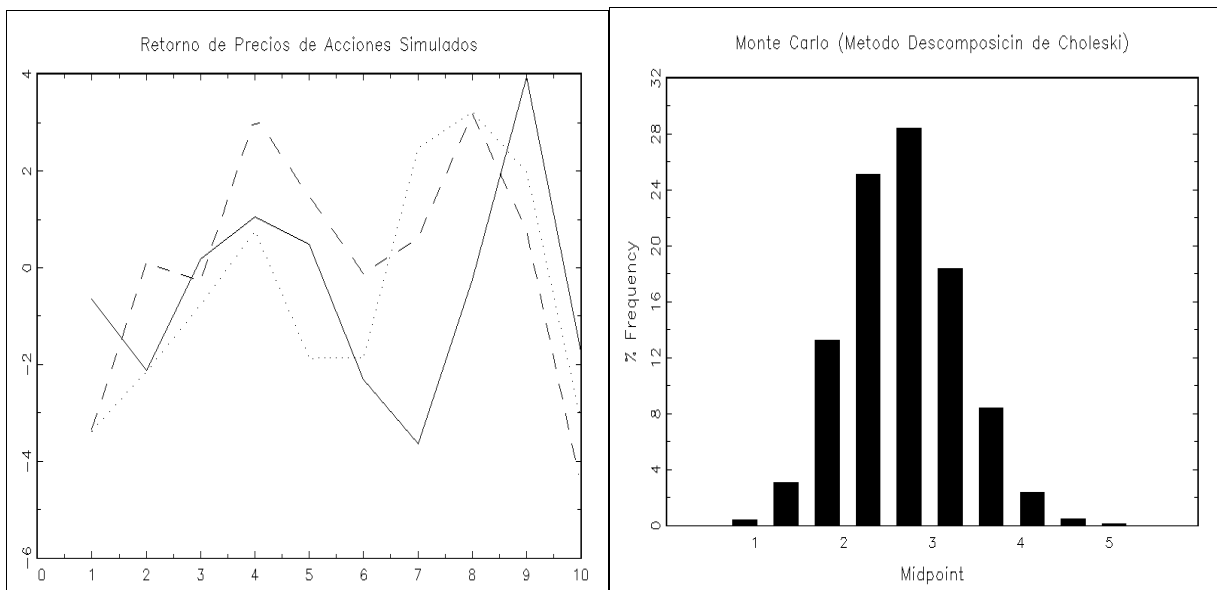
El componente izquierdo de la ecuación corresponde a la matriz de varianzas y covarianzas de los retornos, y asumiendo que los  $\xi_{it}$  se distribuyen iid normal con media 0 y varianza 1, i.e.  $E[\Gamma \cdot \Gamma'] = I_n$ , entonces:

$$E[\Delta P \cdot \Delta P'] = \Phi \cdot E[\Gamma \cdot \Gamma'] \cdot \Phi'$$

$$E[\Sigma] = \Phi \cdot \Phi'$$

siendo la última expresión la descomposición de Choleski para la matriz de varianzas y covarianzas de los retornos. Una vez encontrada la matriz descompuesta  $\Phi$  se procede a simular  $J$  secuencias de largo  $\{t+1, T\}$  de precios (retornos) para el vector de  $n$  activos del portafolio. Este vector simulado de retornos servirá de base para el cálculo del VaR generado a partir de  $J$  simulaciones de Monte Carlo ( $J=10,000$ ) para todo el vector de retornos.

En el Apéndice 2 se presenta un programa en GAUSS para generar simulaciones de Monte Carlo para un portafolio de tres activos que requieren de la descomposición de Choleski para simular trayectorias de retornos. Se considera un horizonte de 10 períodos con 10000 simulaciones para cada activo. Los resultados del VaR se presentan en el siguiente histograma, y además una realización particular de precios de activos durante estos 10 períodos.



**Figura N°20-a**

**Figura N°20-b**

La figura N°20-a representa una particular secuencia de retornos de para los tres activos, simulados utilizando la descomposición de Choleski (ver Apéndice N°2). Lo interesante de esta simulación es que las correlaciones de las series simuladas preservan asintóticamente las cualidades de la matriz de varianzas y covarianzas de la base de datos original.

Las tres secuencias son simuladas 10,000 veces para 10 períodos, de donde se obtienen entonces un vector de 10,000 filas con precios de para cada uno de los activos bajo escenarios alternativos. A partir de estos tres vectores se procede al cálculo del VaR. Se generan 10,000 VaRs los cuales se pueden representar por un histograma, reflejando que para este ejemplo el VaR tiene un valor medio esperado de aproximadamente 2.6%.

## 12. Conclusiones.

Las dimensiones consideradas en la elección de un portafolio de inversión descansan tradicionalmente y mayoritariamente en conceptos asociados al retorno y al grado de liquidez de los instrumentos alternativos. La dimensión de riesgo suele ser considerada tangencialmente en la medida de que no se dispone de una metodología de aplicación simple en el momento de medir estos riesgos.

Este artículo tiene como objetivo profundizar en esta dimensión y familiarizar al lector con metodologías alternativas de medición del riesgo financiero. Aquí se presentan diferentes enfoques para cuantificar el riesgo en un portafolio de inversión, que van desde conceptos simples como duración, hasta métodos más sofisticados como son los de simulación de Monte Carlo para la generación de Value at Risk (VaRs).

Cada uno de los diversos métodos presentados tiene ventajas y desventajas. En la medida que el portafolio analizado no contenga activos no lineales como opciones, se recomienda usar métodos simples como el delta-normal o simulación histórica, los cuales generan una matriz de riesgos en base a información de opciones (volatilidad implícita) o en base a retornos históricos. Sin embargo, si el portafolio dispone de activos no lineales es recomendable la utilización del método de simulación de Monte Carlo, el cual por lo demás tiene la desventaja de ser intensivo en recursos computacionales.

La aplicación de estos métodos va más allá del análisis de un portafolio en particular. La utilización de criterios de VaR para el control del riesgo de instituciones bancarias está siendo cada vez más discutida, y de hecho el Comité de Basilea está recomendando su utilización para la determinación del capital requerido por los bancos para respaldar sus operaciones de trading. Jackson et al. (1998) realizan una exploración de cómo modificar las normas de requerimientos de capital para los bancos de manera de minimizar los riesgos de quiebra en el ámbito de cada banco o de una crisis bancaria generalizada. La aplicación de estos conceptos al sistema bancario chileno está actualmente en la agenda del autor.

## Referencias.

- Best, Philip (1998). *Implementing value at Risk*, John Wiley & Sons.
- Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics* 31 (307-327).
- Campbell, John, Andrew Lo, y A. Craig MacKinlay (1997). *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton U. Press.
- Danielsson, Jon, y Casper G. de Vries (1997). "Value at Risk and Extreme Returns", mimeo *Tinbergen Institute Rotterdam*.
- Dowd, Kevin (1998). *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, John Wiley & Sons.

- Engle, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation", *ECONOMETRICA* 50 (987-1008).
- Hamilton, James D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton U. Press.
- Hill, B.M. (1975). "A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution", *Annals of Statistics* 35 (1163-1173).
- Hols, Martien, y Casper G. de Vries (1991). "The Limiting Distribution of Extremal Exchange Rate Returns", *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 6 (287-302).
- Jackson, P., D. Maude, y W. Perraudin (1998). "Bank Capital and Value at Risk", Working Paper, Bank of England.
- Jorion, Philippe (1997). *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, McGraw-Hill.
- J. P. Morgan (1996). *RiskMetrics-Technical Document*, diciembre.
- Mausser, H. Y Dan Rosen (1999). "Beyond VaR: Triangular Risk Decomposition", *Algo Research Quarterly* 2(1), marzo (31-43).
- Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons.

## Apéndice 1.

@ MODELO DE EXTREME VALUE THEORY (EVT) @  
 @ Ch. Johnson Noviembre 1999 @

```
new;
rndseed 123456789;cls;
library pgraph;
load ret[2665,1] = a:\ipsa.txt;
ret=ln(ret./lag1(ret))*100;
ret=ret[2:rows(ret)];
z1=zeros(rows(ret),1);
z2=zeros(rows(ret),1);
```

```
t=1;
do while t le rows(ret);
  z1[t]=meanc(ret[1:t]);
  z2[t]=stdc(ret[1:t]);
  t=t+1;
endo;
```

```
retz=rev(sortc(ret,1));
reta=sortc(ret,1);
z=rev(sortc(z1,1));
```

```
mm=500;
a=zeros(mm,1);
```



```

m=1;
do while m le mm;
    a[m]=1/(1/m*sumc(log(z[1:m]))-log(z[m+1]));
    m=m+1;
endo;

@ Generacion de Extreme Quantile Estimators @
m=20;
p=zeros(m,1);
_pdate="";
title("Estimador de Hill: Tail Index");xlabel("Valor de M (Threshold)");ylabel("Tail Index");xy(mm,a);
_pdate="";title("Histograma para una Serie de Retornos Tipica");xlabel("Retornos");ylabel("%");
{ b, mdev1, pdev1 } = histp(ret,seqa(-30,.1,600));
{ b, mdev2, pdev2 } = histp(rndn(10000,1)*stdc(ret)+meanc(ret),seqa(-30,.1,600));
_plegctl = { 2 3.5 5.5 5 };_plegstr = "Distribucion Empirica\000Distribucion Normal";
xy(mdev1-mdev2,pdev1/sumc(pdev1)-pdev2/sumc(pdev2));

a=round(meanc(a[m-5:m+5]));
n=rows(z);
t=1;
do while t le m;
    p[t]=m/n*(retz[m+1]/retz[m+1-t])^a;
    t=t+1;
endo;
t=t-1;

graphset;
_pdate="";_plegctl = 0;_pbartyp = { 0 10, 1 10 };_pnnum = 2;
begwind;
window(2,2,0);
xlabel("Tamaño Muestral");ylabel("Media")title("Media Secuencial");xy(rows(z1),z1);
nextwind;ylabel("Varianza")title("Varianza Secuencial");xy(rows(z2),z2^2);
nextwind;title("Distribucion Normal y t-Student para un Activo");xlabel("Retorno");ylabel("Probabilidad");
_plegctl = { 2 6 5.5 3 };_plegstr = "Normal \000 t-Student";xy(reta,cdfn(reta)-(1-cdfc(reta,a)));
nextwind;_plegctl = { 2 6 5.0 3 };_plegstr = "Normal \000 t-Student \000 Estimada (EVT)";
title("PDF de un Activo con Estimación de Cola Superior");
reta=reta[rows(reta)-m+1:rows(reta)];xy(reta,cdfn(reta)-(1-cdfc(reta,a))-1-p);
endwind;

```

## Apéndice 2.

```

@ MODELO DE MONTECARLO PARA TRES ACTIVOS @
@ Ch. Johnson Noviembre 1999 @

```

```

new;
rndseed 123456789;
cls;
library pgraph;
load ret[242,3] = a:\ret.txt;
pos={.3985 .3618 .2396};
simula=10;

```

```

runchol=10000;

a=chol(vcx(ret));
varpmcs=zeros(runchol,1);
ch=1;
do while ch le munchol;
    s=1;
    dp=zeros(cols(ret),simula);
    do while s le simula;
        dp[. ,s]=a*randn(3,1);
        s=s+1;
    endo;
    dp=dp';
    ccmcs=corr(dp);
    sdmcs=stdc(dp);
    sddmcs=eye(rows(sdmcs)).*sdmcs;
    varpmcs[ch]=1.645*sqrt(pos*sddmcs*ccmcs*sddmcs*pos);
    ch=ch+1;
enddo;
_pdate="";
if simula le 100;
    title("Retorno de Precios de Acciones Simulados");xy(simula,dp);
endif;
title("Monte Carlo (Metodo Descomposición de Choleski)");histp(varpmcs,10);
end;

```

**Documentos de Trabajo  
Banco Central de Chile**

**Working Papers  
Central Bank of Chile**

NÚMEROS ANTERIORES

PAST ISSUES

La serie de Documentos de Trabajo en versión PDF puede obtenerse gratis en la dirección electrónica: <http://www.bcentral.cl/Estudios/DTBC/doctrab.htm>. Existe la posibilidad de solicitar una copia impresa con un costo de \$500 si es dentro de Chile y US\$12 si es para fuera de Chile. Las solicitudes se pueden hacer por fax: (56-2) 6702231 o a través de correo electrónico: [bcch@condor.bcentral.cl](mailto:bcch@condor.bcentral.cl)

Working Papers in PDF format can be downloaded free of charge from: <http://www.bcentral.cl/Estudios/DTBC/doctrab.htm>. Hard copy versions can be ordered individually for US\$12 per copy (for orders inside Chile the charge is Ch\$500.) Orders can be placed by fax: (56-2) 6702231 or email: [bcch@condor.bcentral.cl](mailto:bcch@condor.bcentral.cl)

- |  |                |
|--|----------------|
| DTBC-66  | Marzo 2000     |
| <b>Policy Biases When The Monetary and Fiscal Authorities Have Different Objectives</b>                |                |
| Herman Bennett y Norman Loayza   |                |
| DTBC-65  | Marzo 2000     |
| <b>A Note on the Moments of Stochastic Shrinkage Parameters in Ridge Regression</b>                    |                |
| Luis Firinguetti y Hernán Rubio  |                |
| DTBC-64  | Febrero 2000   |
| <b>El Encaje, los Flujos de Capitales Y el Gasto: Una Evaluación Empírica</b>                          |                |
| Guillermo Le Fort y Sergio Lehmann   |                |
| DTBC-63  | Febrero 2000   |
| <b>Household Saving in Chile: Microeconomic Evidence</b>   |                |
| Andrea Butelmann y Francisco Gallego   |                |
| DTBC-62  | Enero 2000     |
| <b>Bank Concentration: Chile and International Comparisons</b>   |                |
| Ross Levine  |                |
| DTBC-61  | Enero 2000     |
| <b>Optimal Monetary Policy Rules under Inflation Range Targeting</b>                                   |                |
| Juan Pablo Medina y Rodrigo Valdés   |                |
| DTBC-60  | Diciembre 1999 |
| <b>Comovement and Macroeconomic Interdependence: Evidence for Latin America, East Asia, and Europe</b> |                |
| Norman Loayza, Humberto Lopez y Angel Ubide  |                |

DTBC-59	Diciembre 1999
<b>Capital Controls in Chile: Effective? Efficient?</b> Francisco Gallego, Leonardo Hernández y Klaus Schmidt-Hebbel	
DTBC-58	Diciembre 1999
<b>Demand for Reserves under International Capital Mobility</b> Pablo García	
DTBC-57	Diciembre 1999
<b>Origins and Resolution of a Banking Crisis: Chile 1982-86</b> Edgardo Barandiarán y Leonardo Hernández	
DTBC-56	Diciembre 1999
<b>Financial Intermediation and Growth: Causality and Causes</b> Thorsten Beck, Ross Levine y Norman Loayza	
DTBC-55	Diciembre 1999
<b>Inflation Targets and Stabilization in Chile</b> Oscar Landerretche, Felipe Morandé y Klaus Schmidt-Hebbel	
DTBC-54	Diciembre 1999
<b>Income Inequality and the Real Exchange Rate</b> Pablo García	
DTBC-53	Diciembre 1999
<b>Series de Ahorro e Ingreso por Agente Económico en Chile, 1960-1997</b> Herman Bennett, Klaus Schmidt-Hebbel y Claudio Soto	
DTBC-52	Diciembre 1999
<b>Integración Financiera y Coordinación Macroeconómica en el Mercosur</b> Carlos Budnevich y Roberto Zahler	
DTBC-51	Noviembre 1999
<b>Determinants of Current Account Deficits in Developing Countries</b> César Calderón, Alberto Chong y Norman Loayza	
DTBC-50	Noviembre 1999
<b>The Effect of Capital Controls on Interest Rate Differentials</b> Luis Oscar Herrera y Rodrigo Valdés	