

Banco Central de Chile
Documentos de Trabajo

Central Bank of Chile
Working Papers

N° 462

Abril 2008

MEDIDAS DE VOLATILIDAD DE ÍNDICES ACCIONARIOS: EL CASO DEL IPSA

Rodrigo Alfaro

Carmen Gloria Silva

La serie de Documentos de Trabajo en versión PDF puede obtenerse gratis en la dirección electrónica: <http://www.bcentral.cl/esp/estpub/estudios/dtbc>. Existe la posibilidad de solicitar una copia impresa con un costo de \$500 si es dentro de Chile y US\$12 si es para fuera de Chile. Las solicitudes se pueden hacer por fax: (56-2) 6702231 o a través de correo electrónico: bcch@bcentral.cl.

Working Papers in PDF format can be downloaded free of charge from: <http://www.bcentral.cl/eng/stdpub/studies/workingpaper>. Printed versions can be ordered individually for US\$12 per copy (for orders inside Chile the charge is Ch\$500.) Orders can be placed by fax: (56-2) 6702231 or e-mail: bcch@bcentral.cl.



BANCO CENTRAL DE CHILE

CENTRAL BANK OF CHILE

La serie Documentos de Trabajo es una publicación del Banco Central de Chile que divulga los trabajos de investigación económica realizados por profesionales de esta institución o encargados por ella a terceros. El objetivo de la serie es aportar al debate temas relevantes y presentar nuevos enfoques en el análisis de los mismos. La difusión de los Documentos de Trabajo sólo intenta facilitar el intercambio de ideas y dar a conocer investigaciones, con carácter preliminar, para su discusión y comentarios.

La publicación de los Documentos de Trabajo no está sujeta a la aprobación previa de los miembros del Consejo del Banco Central de Chile. Tanto el contenido de los Documentos de Trabajo como también los análisis y conclusiones que de ellos se deriven, son de exclusiva responsabilidad de su o sus autores y no reflejan necesariamente la opinión del Banco Central de Chile o de sus Consejeros.

The Working Papers series of the Central Bank of Chile disseminates economic research conducted by Central Bank staff or third parties under the sponsorship of the Bank. The purpose of the series is to contribute to the discussion of relevant issues and develop new analytical or empirical approaches in their analyses. The only aim of the Working Papers is to disseminate preliminary research for its discussion and comments.

Publication of Working Papers is not subject to previous approval by the members of the Board of the Central Bank. The views and conclusions presented in the papers are exclusively those of the author(s) and do not necessarily reflect the position of the Central Bank of Chile or of the Board members.

Documentos de Trabajo del Banco Central de Chile
Working Papers of the Central Bank of Chile
Agustinas 1180
Teléfono: (56-2) 6702475; Fax: (56-2) 6702231

**MEDIDAS DE VOLATILIDAD DE ÍNDICES
ACCIONARIOS: EL CASO DEL IPSA**

Rodrigo Alfaro
Gerencia de Estabilidad Financiera
Banco Central de Chile

Carmen Gloria Silva
Gerencia de Infraestructura y Regulación Financiera
Banco Central de Chile

Resumen

Este documento revisa las formas tradicionales —basadas en precios de cierre— de medir la volatilidad bursátil, e introduce medidas alternativas sugeridas por Parkinson (1980), Garman y Klass (1980) y Rogers y Satchell (1991). Estas medidas usan información adicional de precios durante el día y por ello son más eficientes que las medidas tradicionales. Esta propiedad se considera relevante, especialmente para periodos de turbulencias financieras, ocasiones en las que las medidas tradicionales suelen fallar. Asimismo, incluimos una aplicación empírica para el mercado accionario chileno, que confirma los resultados teóricos, y proponemos un índice de volatilidad basado en precios máximos y mínimos observados durante un día de transacciones.

Abstract

This paper reviews the traditional ways to measure volatility which are based only on closing prices, and introduces alternative measurements suggested in Parkinson (1980), Garman and Klass (1980), and Rogers and Satchell (1991). Those measurements use additional information of prices throughout the day, which makes them more efficient than the traditional ones. We consider this property relevant for financial stress episodes, when traditional measurements fail. In an empirical application for the Chilean stock market, we confirm the theoretical results and provide an index of price volatility based on daily highs and lows.

Agradecemos los comentarios de Kevin Cowan, Pablo García, José Manuel Garrido, Camilo Vio y un árbitro anónimo. También agradecemos a Viviana Fernández y Felipe Jaque por aportarnos con sus experiencias en el tema. E-mail: ralfaro@bcentral.cl; csilva@bcentral.cl.

I. Introducción

Las recientes turbulencias en los mercados internacionales también se han manifestado en perturbaciones del mercado local. De este modo, en el último tiempo no ha sido extraño presenciar mayores movimientos en los precios y retornos de activos locales, fenómeno que se describe como un incremento de la *volatilidad* de los mercados financieros. Poseer y entender indicadores de volatilidad de variables financieras es fundamental, tanto para participantes de mercado como para reguladores, con el objetivo de lograr una adecuada administración de riesgos. Pero, medir la volatilidad no siempre es un ejercicio sencillo, por cuanto corresponde a un concepto no observable que es extraído a través de modelos teóricos sobre el precio del activo.

El objetivo de este documento es cuantificar la volatilidad incondicional o de “largo plazo” para activos financieros y explorar como ésta se ve afectada por las turbulencias financieras. Para ello, nuestra investigación presenta una revisión de las medidas de volatilidad para índices accionarios y una aplicación de estas metodologías para el caso del índice accionario chileno, IPSA.

El trabajo está organizado con la siguiente estructura. En la sección II revisamos medidas tradicionales de volatilidad, las cuales definimos como todas aquellas que están basadas en precios de cierre de los activos. La sección III se focaliza en medidas de volatilidad que puedan ser obtenidas en el transcurso de un día, medidas intra-día, a través de información adicional del precio del activo (mínimo, máximo y apertura). Se utiliza el clásico modelo binomial de valoración de opciones para presentar propiedades estadísticas de estas medidas intra-día. En la sección IV presentamos medidas que utilizan información de opciones. La sección V presenta los resultados empíricos para el caso del IPSA, los cuales corroboran los resultados teóricos presentados en las secciones anteriores. En particular, consideramos que en períodos de alta turbulencia las variables financieras se desacoplan de sus parámetros históricos por lo que sólo la información más reciente es relevante. Basados en este resultado, proponemos un índice de volatilidad intra-día para el IPSA (VIMA) que utiliza información de los precios máximo y mínimo durante el día y que corresponde a una adaptación del índice de Parkinson (1980). El índice propuesto tiene propiedades estadísticas deseables (insesgado y eficiente) y es sencillo de computar. Finalmente, la sección VI resume las principales conclusiones del trabajo.

II. Medidas Tradicionales

1. Ventana Móvil y RiskMetrics

La medida usual para calcular volatilidad corresponde a la ventana de desviaciones estándar (DE). En general, ésta se calcula utilizando un número fijo de las más recientes observaciones de retorno del activo y su fórmula para el periodo t es:

$$\sigma_{DE,t} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{t-i} - \bar{r}_t)^2}, \text{ con } \bar{r}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{t-i}. \quad (1)$$

Donde r_{t-i} corresponde al retorno logarítmico del activo calculado con los precios de cierre para cada uno de los $t-i$ días, \bar{r}_t es el retorno promedio durante el período, generalmente muy cercano a cero, y n es el largo de la ventana. Por ejemplo, para calcular la volatilidad del mes más reciente se usa un largo de 21 días, considerando solo los días hábiles. Esta medida de volatilidad es asintóticamente eficiente si el retorno logarítmico es homocedástico y sigue una distribución normal.

Engle (2001) considera a $\sigma_{DE,t}$ como el primer modelo ARCH para estimar volatilidad, pero postula dos críticas significativas. Primero, cada observación dentro de la ventana tiene el mismo ponderador, ignorando que observaciones más recientes podrían ser más relevantes y por ende deberían tener un ponderador mayor, y segundo, las observaciones anteriores a la ventana tienen un ponderador de cero y si bien su relevancia es menor, podrían ser importantes. La primera crítica puede controlarse ponderando las observaciones exponencialmente con lo cual la volatilidad se computaría de la siguiente forma:

$$\sigma_{EW,t} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda^i (r_{t-i} - \bar{r}_t)^2}{\sum_{i=1}^n \lambda^i}} . \quad (2)$$

Esta medida se denomina Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) y colapsa a $\sigma_{DE,t}$ cuando el ponderador es 1 ($\lambda = 1$). Del igual modo, considerando que en la práctica \bar{r}_t es cercano a cero, podemos hacer frente a la segunda crítica asumiendo $\lambda < 1$, con lo cual se obtiene la siguiente medida de volatilidad^{1/}:

$$\sigma_{RM,t} = \sqrt{\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i r_{t-i}^2} . \quad (3)$$

Esta medida ha sido popularizada por RiskMetrics (JP Morgan) como un mecanismo sencillo de predicción de volatilidad ya que simple álgebra nos lleva a la siguiente formulación (Willmot, 2006):

$$\sigma_{RM,t} = \sqrt{\lambda \sigma_{RM,t-1}^2 + (1-\lambda) r_{t-1}^2} . \quad (4)$$

donde se recomienda utilizar $\lambda = 0,94$, ajuste basado en series con datos diarios para Estados Unidos^{2/}.

Si suponemos que los retornos independientes y homocedásticos siguen una distribución normal centrada en cero, entonces $\sigma_{DE,t}$ y $\sigma_{RM,t}$ son insesgadas. Más aún, la correlación entre estas medidas es^{3/}:

^{1/} El supuesto de retorno cero se refiere a retorno *diario*, el cual por efecto de arbitraje debiera tener valor esperado cero.

^{2/} González y Jaque (2007) aplican esta metodología para Chile, analizando el Tipo de Cambio Nominal.

^{3/} Detalles técnicos en la sección 1 del Apéndice.

$$\text{Corr}(\sigma_{DE,t}^2, \sigma_{RM,t}^2) = (1 - \lambda^n) \sqrt{\frac{(1 + \lambda)}{n(1 - \lambda)}} \quad (5)$$

Por ejemplo, para el caso de $\lambda = 0,94$, valor sugerido por RiskMetrics para datos diarios, la correlación se maximiza con una ventana de 20 días, es decir, aproximadamente un mes; mientras que para $\lambda = 0,82$, la ventana debe ser de 6 días, o una semana.

2. Modelo GARCH

Los modelos de Engle (1982) y Bollerslev (1986) introducen generalizaciones de los parámetros λ y \bar{r} , con lo cual se obtiene un modelo que también es un promedio ponderado de los errores pasados al cuadrado, pero tiene ponderaciones decrecientes que nunca llegan a cero, y puede ser resumido en el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \sigma_t e_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha(r_{t-1} - \mu)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Donde, μ es el retorno esperado del activo, e_t es el término de error que se distribuye normal estándar, y $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$ es el conjunto de parámetros a estimar.

El sistema representa un modelo GARCH(1,1) que ha resultado exitoso en la caracterización de series financieras con datos diarios^{4/}. Su estimación por máxima verosimilitud permite obtener estimaciones para el vector de parámetros θ , los cuales se encuentran restringidos a las siguientes condiciones:

- (i) $\omega, \alpha, \beta > 0$, para asegurar varianza positiva, y
- (ii) $\alpha + \beta < 1$ para asegurar un GARCH estable, de lo contrario si $\alpha + \beta = 1$, $\omega = 0$ estamos en presencia de un GARCH Integrado (IGARCH), en cuyo caso deja de existir la varianza incondicional.

Es interesante notar que μ corresponde a la estimación del retorno promedio y que un IGARCH(1,1) es similar a RiskMetrics en el caso de que $\mu = 0$.

Sin embargo, la estimación de un modelo ARCH ó GARCH presenta algunas dificultades técnicas y teóricas. En primer lugar, es reconocido que el proceso de maximización de estos modelos es complejo debido a las restricciones en los parámetros y la posible presencia de máximos locales^{5/}. Segundo, estos modelos presentan sesgo en los parámetros que disminuye con el tamaño de la muestra, por lo que su estimación requiere una gran cantidad de observaciones^{6/}. Por último, es difícil

^{4/} Véase por ejemplo: Lumsdaine (1995), Hansen y Lunde (2001), ó Hwang y Pereira (2003). Para el caso de Chile, Fernández (2003) modela el Tipo de Cambio Nominal deflactado por UF.

^{5/} Hwang y Pereira (2003) reemplazan la restricción de no negatividad de los parámetros, sugerida por Bollerslev, T. (1986), por no negatividad de la varianza condicional. Las simulaciones y resultados empíricos apoyan la no negatividad de los parámetros.

^{6/} Engle, Hendry y Trumble (1985) presentan resultados para un modelo ARCH(1) sobre la base de simulaciones, mientras que Linton (1997) desarrolla una expansión de Edgeworth para el modelo GARCH(1,1).

diferenciar estadísticamente entre un GARCH(1,1) con persistencia elevada, esto es $\alpha + \beta$ con un valor muy cercano a 1, versus un IGARCH(1,1)^{7/}.

III. Medidas Intra-día

Las medidas presentadas anteriormente usan precios de cierre de los activos, excluyendo información relevante que se genera dentro del día. A continuación, introducimos medidas de volatilidad basadas en precios de apertura, cierre, máximo y mínimo.

1. Medidas para activos sin tendencia

Supongamos un activo que se transa en el mercado y que se identifica con los siguientes precios: o es el logaritmo del precio de apertura, que por simplicidad asumimos igual a 1; c es el logaritmo del precio de cierre, h el logaritmo del precio máximo y l el logaritmo del precio mínimo.

Para caracterizar el precio del activo usamos el clásico modelo binomial para valorar opciones. En este modelo, el precio actual del activo puede seguir dos trayectorias futuras para un periodo de tiempo determinado, en función de su volatilidad (σ):

- (i) una trayectoria al alza, definida como $u = \exp(\sigma\sqrt{1/N})$, y
- (ii) una trayectoria a la baja, que corresponde al inverso de la trayectoria anterior, definida como $d = 1/u$.

Donde N corresponde al número de pasos del árbol binomial (Hull, 2000). Por ejemplo, si $N=1$ se obtiene la evolución del precio del activo cuando sube una vez o baja una vez, del mismo modo con $N=2$ se obtienen cuatro trayectorias del activo: el precio sube en el paso uno y en el dos, sube en el primer paso y baja en el dos, primero baja y luego sube y por último baja en ambos pasos (ver Gráfico 1). En la práctica, se usa un gran número de pasos para definir más trayectorias del precio del activo, por cuanto con N pasos es posible identificar 2^N trayectorias.

Gráfico 1: Modelo binomial para precio de activos

Consideremos las siguientes definiciones: $\sigma_{CC}^2 \equiv (c - o)^2$ y $\sigma_{HL}^2 \equiv (h - l)^2$, donde σ_{CC}^2 es la medida tradicional de volatilidad en base a precios de cierre^{8/} y σ_{HL}^2 es un nuevo estimador que utiliza precios máximos y mínimos observados en el transcurso del día siguiendo lo sugerido por Parkinson (1980).

^{7/} Lumsdaine (1995) muestra que los estadísticos estándares fallan en testear esta hipótesis y Maekawa, Lee y Tokutsu (2003) argumentan que la posible presencia de cambios estructurales en la varianza tendería a incrementar la persistencia de un GARCH(1,1).

^{8/} Nótese que σ_{CC}^2 es la versión diaria de σ_{DE}^2 . Bajo el supuesto de retorno cero, la segunda puede ser entendida como el promedio simple de los σ_{CC}^2 .

Si consideramos un árbol binomial con un paso ($N=1$), los valores de c, h y l en los escenarios al alza y a la baja son:

Tabla 1: Resultados para un modelo de un paso

<i>Escenarios</i>	<i>c</i>	<i>h</i>	<i>l</i>
<i>u</i>	σ	σ	0
<i>d</i>	$-\sigma$	0	$-\sigma$

Fuente: Elaboración propia.

Notar que se presentan los resultados para los logaritmos de los precios. Por ejemplo, el precio de cierre en el escenario optimista es: $c = \ln(u) = (\sigma\sqrt{1/1}) = \sigma$, que a su vez coincide con el precio máximo, mientras que el precio mínimo se obtiene de $l = \ln(o) = \ln(1) = 0$.

Por otra parte, si asumimos que el retorno del activo es cero ($\mu = 0$), la probabilidad de ocurrencia de cada estado es aproximadamente 0,5, con lo cual los valores esperados de σ_{cc}^2 y σ_{hl}^2 son:

$$E(\sigma_{cc}^2) = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}(-\sigma)^2 = \sigma^2 \quad (7)$$

$$E(\sigma_{hl}^2) = \frac{1}{2}(\sigma - 0)^2 + \frac{1}{2}(0 + \sigma)^2 = \sigma^2 \quad (8)$$

No es de extrañar que los valores esperados de σ_{cc}^2 y σ_{hl}^2 sean iguales por cuanto ambos indicadores usan la misma información, debido a que en este modelo de un paso $h = c$ y $l = o$ en el escenario al alza, mientras que si el escenario es a la baja, tenemos que $h = o$ y $l = c$. Para entender la relación entre σ_{cc}^2 y σ_{hl}^2 , en la siguiente tabla presentamos los escenarios posibles para un árbol binomial de 2 pasos.

Tabla 2: Resultados para un modelo con dos pasos

<i>Escenarios</i>	<i>c</i>	<i>h</i>	<i>l</i>
<i>uu</i>	$\sigma\sqrt{2}$	$\sigma\sqrt{2}$	0
<i>ud</i>	0	$\sigma\sqrt{2}/2$	0
<i>du</i>	0	0	$-\sigma\sqrt{2}/2$
<i>dd</i>	$-\sigma\sqrt{2}$	0	$-\sigma\sqrt{2}$

Fuente: Elaboración propia.

Con esta información los valores esperados de ambas medida de varianza son:

$$E(\sigma_{cc}^2) = \frac{1}{4}(\sigma\sqrt{2})^2 + \frac{1}{4}(-\sigma\sqrt{2})^2 = \sigma^2 \quad (9)$$

$$E(\sigma_{hl}^2) = \frac{1}{4}(\sigma\sqrt{2} - 0)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2} - 0\right)^2 + \frac{1}{4}\left(0 + \frac{\sigma\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(0 + \sigma\sqrt{2})^2 = 1,25\sigma^2 \quad (10)$$

Al aumentar el número de pasos solo σ_{CC}^2 resulta insesgado, mientras que el valor esperado de σ_{HL}^2 sobrestima el verdadero valor de la varianza. En particular, el factor de sesgo a_N es 0,25 veces. El sesgo se produce porque calculamos la varianza con datos discretos de precios máximos y mínimos, usando solo dos pasos, en circunstancias que la derivación de este estimador depende fuertemente del monitoreo de un significativo número de trayectorias de precios.

Parkinson (1980) demostró que cuando el precio del activo se distribuye lognormal entonces $E(\sigma_{HL}^2) = 4 \log(2) \cdot \sigma^2$. Por su parte, Wilmott (2006) demuestra que el modelo binominal converge a esta distribución cuando $N \rightarrow \infty$, por tanto:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(\sigma_{HL}^2) = 4 \log(2) \cdot \sigma^2 \quad (11)$$

No obstante, el Error Cuadrático Medio (ECM) de σ_{HL}^2 es menor que σ_{CC}^2 ^{9/}. Nótese que para $N=2$, tenemos que $ECM(\sigma_{CC}^2) = \sigma^4$, en cambio $ECM(\sigma_{HL}^2) = 0,625\sigma^4$.

Se intuye que los precios máximos y mínimos contienen más información sobre la volatilidad que los precios de apertura y cierre, debido a que capturan sus valores durante el intervalo de transacciones, en cambio, los precios de apertura y cierre son meramente fotos instantáneas del proceso.

Como conocemos el factor de sesgo de σ_{HL}^2 ($a_N = 1,25$), podemos generar un estimador insesgado σ_I^2 , tal que:

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{a_N} \sigma_{HL}^2 = 0,8\sigma_{HL}^2 \rightarrow E(\sigma_I^2) = \sigma^2 \quad \text{y} \quad ECM(\sigma_I^2) = 0,36\sigma^4 \quad (12)$$

Así, es posible construir un nuevo estimador σ_I^2 que es insesgado como σ_{CC}^2 , pero tiene menor varianza, y con ello un menor ECM. Otro estimador insesgado y eficiente fue propuesto por Garman y Klass (1980), cuya adaptación para el caso binominal es como sigue:

$$\sigma_{GK}^2 = \frac{1}{2}(h-l)^2 - \left(\frac{a_N}{2} - 1\right)(c-o)^2 \quad (13)$$

Por construcción GK es insesgado, y para el caso de $N=2$, tenemos que $ECM(\sigma_{GK}^2) = 0,5625\sigma^4$. Sin embargo, es más eficiente que σ_{HL}^2 cuando $N > 12$, como se desprende de la Tabla 3.

^{9/} Detalles técnicos en sección 2 del Apéndice.

2. Medida que controla por tendencia

Los resultados anteriores pueden ser erróneos si el precio del activo presenta tendencia durante el día ($\mu \neq 0$). Por ejemplo, si el activo va al alza, entonces $h = c$ y $l = o$, luego σ_{PK}^2 computaría una varianza espuria. Una forma de controlar por la tendencia es incorporar el precio de apertura y cierre del activo en la medida de varianza.

Consideremos el siguiente estimador propuesto por Rogers y Satchell (1991):

$$\sigma_{RS}^2 = (h - o)(h - c) + (l - o)(l - c) \quad (14)$$

Esta medida además de usar precios máximos y mínimos, resta la evolución del precio del activo al incorporar el precio inicial y de cierre. Nuevamente, considerando los escenarios para un árbol binomial de dos pasos, las estadísticas básicas de σ_{RS}^2 son:

$$E(\sigma_{RS}^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{-\sigma\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 0,25\sigma^2 \quad \text{y} \quad ECM(\sigma_{RS}^2) = 0,625\sigma^4 \quad (15)$$

Es decir, σ_{RS}^2 también es sesgado y su sesgo es mayor que σ_{PK}^2 . Nuevamente, conociendo el factor de sesgo ($b_N = 0,25$) es posible construir un estimador insesgado de σ_{RS}^2 como sigue:

$$\sigma_J^2 = \frac{1}{b_N} \sigma_{RS}^2 = 4\sigma_{RS}^2 \rightarrow E(\sigma_J^2) = \sigma^2 \quad \text{y} \quad ECM(\sigma_J^2) = \sigma^4 \quad (16)$$

Nótese que este estimador tiene las mismas propiedades que σ_{CC}^2 , pero no está afectado por tendencia. Rogers y Satchell (1991) demostraron que para el caso continuo de un modelo lognormal: $E(\sigma_{RS}^2) = \sigma^2$, es decir, σ_{RS}^2 es insesgado para N grande, es decir, cuando existen abundantes trayectorias del precio del activo.

3. Corrección del sesgo y Eficiencia Relativa

Hasta ahora hemos presentado las estimaciones de sesgo y su correspondiente factor de corrección para las medidas σ_{HL}^2 y σ_{RS}^2 en el caso de un modelo con uno y dos pasos. El análisis extendido del modelo binomial para una mayor frecuencia de pasos se presenta en la Tabla 3^{10/}. Los resultados muestran que para ambas medidas de varianza que usan precios intra-día el factor de corrección aumenta proporcionalmente con la disponibilidad de un mayor número de trayectorias para el precio del activo (mayor N). Para el caso de σ_{HL}^2 el factor tiende a 2,773 a medida que N crece, mientras que el factor de corrección de σ_{RS}^2 tiende a uno.

^{10/} La Tabla no presenta el factor de corrección para las medidas σ_{CC}^2 y σ_{GK}^2 por cuanto ambas son insesgadas para todo N .

En general, las ventajas del clásico estimador de volatilidad σ_{CC}^2 son su simplicidad y que está libre de sesgo, sin embargo, su principal desventaja es el hecho que ignora información disponible, la cual puede contribuir a la eficiencia del estimador, debido a que es posible que incluso leves aportes a la información utilizada tengan un impacto relevante. En este sentido, Garman y Klass (1980) señalan que el clásico estimador σ_{CC}^2 sería un *benchmark* por el cual se medirían otros estimadores, siendo posible construir una razón de Eficiencia Relativa (ER) de la siguiente forma:

$$ER(\sigma_A^2) = \frac{Var(\sigma_{CC}^2)}{Var(\sigma_A^2)} \quad (17)$$

Donde $Var(\sigma_{CC}^2)$ corresponde a la varianza de la medida σ_{CC}^2 y $Var(\sigma_A^2)$ es la varianza de un estimador insesgado (σ_A^2), para el cual se desea calcular la eficiencia relativa.

El concepto de eficiencia relativa es muy relevante por cuanto ayuda a mejorar los niveles de confianza de los estimadores y permite restringir la cantidad de datos, evitando problemas de no estacionariedad.

Garman y Klass (1980) y Rogers y Satchell (1991) computan ER para los estimadores de varianza descritos previamente en el caso de que N tiende a infinito, mientras que para $N \leq 22$ los valores teóricos de ER fueron calculados usando los respectivos factores de corrección (Tabla 3).

Tabla 3: Factores de Corrección y Eficiencia Relativa

Las medidas de varianza presentadas anteriormente pueden ser suavizadas mediante el uso de ventanas móviles. Dichas mediciones podrían considerar los factores de corrección de sesgos. De este modo, se facilita la comparación con otras medidas de volatilidad como las derivadas del modelo GARCH^{11/}.

IV. Medidas basadas en opciones

Una forma alternativa de obtener la volatilidad incondicional de un activo es a través del precio de opciones sobre el activo de interés. Estas medidas son muy conocidas en mercados financieros internacionales, existiendo índices públicos de su cálculo.

En primer lugar, si se asume como válido el modelo de Black-Scholes^{12/} el precio del activo puede ser caracterizado como sigue:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t \quad (18)$$

^{11/} Vipul y Jacob (2007) comparan medidas intra-día con medidas tradicionales para el caso del índice accionario indio Nifty, corroborando que la eficiencia de las primeras se mantiene en datos diarios, semanales y mensuales.

^{12/} Ver Black y Scholes (1973).

donde los parámetros μ y σ representan el retorno y volatilidad del activo. Con esto, el precio de una *call* europea con precio de ejercicio K es:

$$C(K) = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \quad (19)$$

donde S_0 es el precio actual del activo, $N(d)$ la función de probabilidad normal, r la tasa de interés libre de riesgo, T la madurez del contrato y los factores d_1 y d_2 son funciones de los parámetros del modelo (Willmot, 2006).

Si $C(K)$ es conocido, entonces es posible recuperar el parámetro de volatilidad del activo subyacente, contenido en los factores d_1 y d_2 , cuyo cálculo se conoce como volatilidad implícita (*implied volatility*). Hull (2000) comenta que la volatilidad implícita es creíble para los casos de opciones *at-the-money*, es decir, cuyo precio de ejercicio sea cercano al precio *forward*^{13/}. Una medición práctica de volatilidad implícita es computada por el Chicago Board Options Exchange (CBOE) en el índice VXO, el cual utiliza opciones sobre el S&P 100 con vencimiento a 30 días.

Si bien la metodología de volatilidad implícita es simple, presenta dos importantes críticas. La primera de ellas es que asume la validez del modelo de Black-Scholes, es decir, que el activo tiene volatilidad constante para todo el periodo. La segunda crítica tiene un carácter más práctico y consiste en el hecho de que la volatilidad implícita es un proceso estocástico complejo, para el cual es difícil crear una estrategia de cobertura. Demeterfi et. al (1999) utiliza una generalización del modelo de Black-Scholes para generar una medida de volatilidad basada directamente en los movimientos del activo, que corrige estas críticas. Esta medida de volatilidad se denomina *volatility swap* y su valor esperado lo computa el CBOE en el índice VIX^{14/}.

V. Resultados para el IPSA

1. Medidas Tradicionales

Utilizando datos diarios del valor del IPSA^{15/} desde el 2 enero de 1996 al 18 de enero del 2008 se calculan varianzas de retornos del índice con ventanas de 21 días y la varianza propuesta por RiskMetrics. La correlación entre ambas medidas es 0,96 ratificando el resultado analítico presentado en la sección II. Asimismo, el Gráfico 2 muestra que los movimientos de ambas series de volatilidad responden a episodios de turbulencia como aquellos ocurridos en el último trimestre de 1998, cuando la volatilidad superó el 50% debido a la crisis asiática, y a finales del 2007, período en el cual se ha apreciado un constante aumento de la volatilidad producto de la crisis *subprime* en Estados Unidos.

Gráfico 2: RiskMetrics (RM) y Desviación Estándar Móvil con 21 días (DE)

^{13/} Véase sección 3 del Apéndice para un ejemplo de volatilidad implícita.

^{14/} Para una derivación simplificada del VIX véase sección 4 del Apéndice.

^{15/} IPSA es el Índice Selectivo de Precios de Acciones de la Bolsa de Comercio de Santiago, que agrupa a las 40 acciones con mayor presencia bursátil.

Asimismo, con toda la muestra se estima un modelo GARCH(1,1) para el IPSA, obteniéndose una persistencia de 0,976 y una volatilidad incondicional de 20%. Sin embargo, estos resultados no parecieran ser estables en el tiempo. El Gráfico 3 presenta la persistencia computada en ventanas móviles de dos años ($n=500$).

Gráfico 3: Persistencia GARCH(1,1)

Posiblemente el alto número obtenido para toda la muestra (0,976) puede ser producto de episodios particulares de crisis, lo que se manifiesta en una volatilidad incondicional más alta y/o un ajuste a modelos de persistencia unitaria (IGARCH), como se desprende de los datos de fines del 2007. En efecto, el Gráfico 4 presenta la desviación estándar móvil y la volatilidad incondicional computada con los parámetros del modelo GARCH, cuando éste presenta una persistencia menor a 0,99^{16/}. Se aprecian cambios de nivel importantes en la volatilidad incondicional durante los últimos diez años. En particular, los períodos de la crisis del 98 y las turbulencias de finales del 2007 presentan volatilidades por sobre el 30%, mientras que durante los años 2002 al 2006, la volatilidad incondicional se mantuvo en torno a 15%. Cabe destacar que la volatilidad medida como desviación estándar móvil si bien sigue los movimientos de la volatilidad incondicional, su trayectoria es mucho más suavizada, aún en los periodos de fragilidad.

Gráfico 4: Volatilidad Incondicional (VI) y Desviación Estándar Móvil (DE)

Para el último período de la muestra, esto es, ventanas que cierran a fines de 2007 y principios de 2008, se calcula un modelo de persistencia unitaria (IGARCH), cuyas estimaciones para el parámetro β de la ecuación (6) arrojan un valor de 0,82, en promedio. Utilizando el resultado analítico de la sección II y entendiendo este proceso IGARCH como un modelo RiskMetrics con $\lambda = 0,82$, entonces concluimos que una medida de σ_{DE}^2 de 6 días permite recoger la información necesaria de volatilidad relevante para los períodos de fragilidad. En otras palabras, esto confirma que en episodios de turbulencias financieras, la volatilidad se encuentran más ligada a eventos de la semana anterior que a fundamentales históricos.

2. Medidas Intra-día

Para calcular las medidas de volatilidad intra-día del IPSA es necesario conocer los factores de corrección aplicables al caso chileno. Para ello, usando datos diarios desde el 2 de enero de 1996 al 18 de enero del 2008 se estimaron los valores históricos de la volatilidad usando precios de cierre y precios intra-día del IPSA. El cociente entre la volatilidad sin corregir de σ_{HL} y σ_{CC} entrega una mediana de **1,54**, es decir, el factor de corrección para el caso del mercado bursátil chileno es menor que el sugerido por Parkinson (1980) para el caso de un número grande de transacciones, pero es mayor que para el caso de 22 transacciones como fue presentado en la Tabla 3. Conociendo el

^{16/} Para finales del 2007 no se computa volatilidad incondicional dado que los datos responden a un modelo de persistencia unitaria (IGARCH). Este modelo resulta coherente con el episodio de turbulencias financieras del último período de la muestra.

factor de corrección para el IPSA, es posible computar una medida insesgada de volatilidad anualizada de la siguiente forma^{17/}:

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{250} \frac{\hat{\sigma}_{HL,t}}{1,54} = \sqrt{\frac{250}{2,37}} \sqrt{(h_t - l_t)^2} \approx 10 \cdot \left(\frac{H_t}{L_t} - 1 \right) \quad (20)$$

Donde H_t y L_t son los precios máximo y mínimo registrados durante un día específico. Del mismo modo, la mediana del cociente entre la volatilidad σ_{RS} y σ_{CC} es de **0,88**, con lo cual se obtiene otra medida insesgada de volatilidad anualizada para el IPSA como:

$$\hat{\sigma}_2 = \sqrt{250} \frac{\hat{\sigma}_{RS,t}}{0,88} \approx 18 \sqrt{\left[\left(\frac{H_t}{C_t} - 1 \right) \cdot \left(\frac{H_t}{O_t} - 1 \right) + \left(\frac{L_t}{C_t} - 1 \right) \cdot \left(\frac{L_t}{O_t} - 1 \right) \right]} \quad (21)$$

Donde H_t, L_t, O_t y C_t son los precios máximo, mínimo, apertura y cierre registrados durante el día. Esta última medida es robusta a la presencia de tendencia del activo.

El Gráfico 5 presenta los promedios mensuales de estas medidas corregidas junto a la tradicional desviación estándar móvil (σ_{DE}).

Gráfico 5: Medidas de Volatilidad

Se observa que todas las medidas se correlacionan positivamente con los episodios de turbulencias. En particular, durante el período de análisis las medidas mayormente correlacionadas son σ_{HL} y σ_{CC} (0,95). Esto implica que una medida intra-día, como la basada en σ_{HL} puede recoger la misma información que una medida tradicional, como σ_{CC} , pero de una manera más eficiente. En la práctica esto significa que se requieren menos días en la ventana móvil de σ_{HL} para obtener el mismo error estándar que en σ_{CC} .

Basado en los resultados anteriores: alta correlación de σ_{HL} y σ_{CC} , mayor eficiencia de σ_{HL} y simplicidad de la volatilidad basada en Parkinson ($\hat{\sigma}_1$), proponemos computar un índice de Volatilidad Intra-día del Mercado Accionario Chileno, que denominados VIMA, de la siguiente forma:

$$\text{VIMA} = 1000 \cdot \left(\frac{H}{L} - 1 \right) \quad (22)$$

Donde H y L corresponden a los precios máximo y mínimo observados durante un día, y el factor 1000 contiene todos los ajustes para esta medida: sesgo, medida en términos anuales y en base 100.

^{17/} Nótese que la medida basada en HL está afectada por la tendencia del activo durante el día. Yang y Zhang (2000) argumentan que dicha tendencia debiera ser pequeña en caso de usar datos intra-día, en donde los agentes no debieran esperar movimientos significativos del activo.

El valor promedio de VIMA para toda la muestra es de 12,3%, pero ha alcanzado valores superiores a 28%. El nivel del índice es consistentemente mayor en los períodos de turbulencias financieras de los últimos años, alcanzando en promedio el mayor nivel de volatilidad durante el reciente periodo agosto-diciembre de 2007 (Tabla 3).

Tabla 3: Descriptiva de VIMA para variadas muestras

VI. Conclusiones

En esta nota resumimos diversas medidas de volatilidad utilizando datos diarios, donde consideramos metodologías tradicionales que se basan en precios de cierre del activo y medidas alternativas que utilizan información de precios dentro del día.

El análisis empírico nos mostró que en períodos de turbulencias las series se alejan de sus parámetros históricos haciendo relevante sólo la información de más corto plazo. Técnicamente significa que el modelo GARCH, que posee varianza incondicional o de “largo plazo” cede a un modelo IGARCH ante turbulencias financieras. Este último se asemeja a una ventana móvil de desviaciones estándar, cuyo largo queda completamente determinado por el parámetro β del modelo IGARCH.

De la revisión bibliográfica encontramos que medidas que utilizan información intra-día son más eficientes que medidas que sólo se basan en precios de cierre. Por ello, debieran ser consideradas en casos donde el período de información relevante son unos pocos días. Esto sugiere que en períodos de turbulencias se debieran utilizar medidas intra-día para cuantificar los cambios en volatilidad del mercado.

Aunando estos resultados, proponemos un índice de volatilidad para el índice accionario IPSA (VIMA) que utiliza el valor máximo y mínimo del índice dentro del día y corresponde a una adaptación del índice de volatilidad propuesto por Parkinson (1980). Hacemos notar que VIMA será sesgado si el IPSA presenta tendencia, pero estimamos que este hecho no debiera ser importante en el caso de datos diarios.

Referencias

- Black, F. y M. Scholes (1973), "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973): 637-659.
- Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive condicional Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics* 31(3): 307-327.
- Demeterfi, K., E. Derman, M. Kamal y J. Zou (1999), "More Than You Ever Wanted to Know About Volatility Swaps," Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.
- Engle, R. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica* 50(4): 987-1007.
- Engle, R. (2001), "GARCH101: The use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics," *The Journal of Economic Perspectives* 15(4): 157-168.
- Engle, R., D. Hendry y D. Trumble (1985), "Small-Sample Properties of ARCH Estimators and Tests," *The Canadian Journal of Economics* 18(1): 66-93.
- Fernández, V. (2003), "How sensitive is Volatility to Exchange Rate Regimes," Documento de Trabajo, Centro de Economía Aplicada, Universidad de Chile.
- Garman, M. y M. Klass (1980), "On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data," *The Journal of Business* 53(1): 67-78.
- González, H. y F. Jaque (2007), "Revisión de Medidas Alternativas de Volatilidad Cambiaria," Banco Central de Chile Manuscrito.
- Hansen, P. y A. Lunde (2001), "A comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)," University of Aarhus Working Paper N°84.
- Hwang, S. y P. Pereira (2003), "Small Sample Properties of GARCH Estimates and Persistence," Financelab Working Paper.
- Hull, J. (2000) *Options, Futures, and other Derivatives*, cuarta edición. Prentice Hall.
- Lumsdaine, R. (1995), "Finite-Sample Properties of the Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) Models: A Monte Carlo Investigation," *Journal of Business & Economic Statistics* 13(1): 1-10.
- Linton, O. (1997), "An Asymptotic Expansion in the GARCH(1,1) Model," *Econometric Theory* 13(4): 558-581.
- Maekawa, K., S. Lee y Y. Tokutsu (2003), "A Note on Volatility Persistence and Structural Changes in GARCH models," Hiroshima University Working Paper.
- Magdon-Ismael, M. y A. Atiya (2000), "Volatility Estimation using High, Low, and Close Data – A Maximum Likelihood Approach," Computational Finance.
- Parkinson, M. (1980), "The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return," *The Journal of Business* 53(1): 61-65.
- Rogers, L. y S. Satchell (1991), "Estimating Variance from High, Low, and Closing Prices," *The Annals of Applied Probability* 1(4): 504-512.
- Vipul y J. Jacob (2007), "Forecasting Performance of Extreme-Value Volatility Estimators," *The Journal of Futures Markets* 27(11): 1085-1105.
- Willmot, P. (2006), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, volumen 3, segunda edición. John Wiley & Sons, Ltd.
- Yang, D. y Q. Zhang (2000), "Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Close Prices," *The Journal of Business* 73(3): 477-491.

Apéndice

Sección 1: Correlación Ventana Móvil y RiskMetrics

Suponga que $r_t \sim N(0, \sigma^2)$ y considere las siguientes medidas de varianza del activo

$$\sigma_{DE,t}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{t-i}^2 \text{ y } \sigma_{RM,t}^2 = \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i r_{t-i}^2.$$

Bajo el supuesto de normalidad, tenemos que $E(\sigma_{DE,t}^2) = \sigma^2$ y ^{18/}

$$E(\sigma_{RM,t}^2) = \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i E(r_{t-i}^2) = \sigma^2 \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i = \sigma^2 \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right) \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right) = \sigma^2$$

Asumiendo independencia: $E(r_{t-1}^2 - \sigma^2)^2 = 2\sigma^4$. Con ello $Var(\sigma_{DE,t}^2) = 2\sigma^4/n$ y

$$Var(\sigma_{RM,t}^2) = \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2i} E[(r_{t-i}^2 - \sigma^2)^2] = 2\sigma^4 \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)$$

La covarianza entre estas medidas se obtiene sólo de los n últimos datos:

$$Cov(\sigma_{DE,t}^2, \sigma_{RM,t}^2) = \left(\frac{1-\lambda}{n\lambda} \right) \sum_{i=1}^n \lambda^i E(r_{t+1-i}^2 - \sigma^2)^2 = 2\sigma^4 \left(\frac{1-\lambda^n}{n} \right)$$

Con ello la correlación es:

$$Corr(\sigma_{DE,t}^2, \sigma_{RM,t}^2) = (1-\lambda^n) \sqrt{\frac{(1+\lambda)}{n(1-\lambda)}}.$$

Sección 2: Derivación de Errores Cuadráticos Medios

Para calcular el error cuadrático medio es necesario conocer el cuarto momento de las respectivas varianzas, cuyos cálculos se presentan a continuación:

$$E(\sigma_{CC}^4) = \frac{1}{4} (\sigma\sqrt{2})^4 + \frac{1}{4} (-\sigma\sqrt{2})^4 = 2\sigma^4$$

$$E(\sigma_{HL}^4) = 2 \left[\frac{1}{4} (\sigma\sqrt{2})^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right] = 2,125\sigma^4$$

^{18/} Debido a que el retorno tiene media cero esta medida es insesgada y no requiere ser corregida por el factor $(n-1)$. Dicho factor se aplica para la desviación estándar que utiliza una estimación del retorno promedio del período.

$$E(\sigma_{RS}^4) = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{2} \right)^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{-\sigma\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right] = 0,125\sigma^4$$

$$\begin{aligned} E(\sigma_{GK}^4) &= \frac{1}{4} E(\sigma_{PK}^4) - 2 * \frac{1}{2} \left(\frac{1,25}{2} - 1 \right) E[(h-l)^2 c^2] + \left(\frac{1,25}{2} - 1 \right)^2 E(\sigma_{CC}^4) \\ &= 0,25 \cdot 2,125\sigma^4 + 0,375 \cdot 2\sigma^4 + 0,375^2 \cdot 2\sigma^4 = 1,5625\sigma^4 \end{aligned}$$

$$E[(h-l)^2 c^2] = \frac{1}{4} (\sigma\sqrt{2})^2 (\sigma\sqrt{2})^2 + \frac{1}{4} (\sigma\sqrt{2})^2 (-\sigma\sqrt{2})^2 = 2\sigma^4$$

Sección 3: Ejemplo de Volatilidad Implícita

Utilizando el modelo de Black-Scholes y asumiendo $S_0 = 1$ y $K = e^{rT}$, tenemos que $C(e^{rT}) = 2N(\sigma\sqrt{T}/2) - 1$, por lo cual la volatilidad implícita corresponde a:

$$\sigma_{IV} = \frac{2}{\sqrt{T}} N^{-1} \left(\frac{1+C}{2} \right).$$

Sección 4: Derivación del VIX

Considere la siguiente generalización del modelo de Black-Scholes:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dZ_t$$

La medida de volatilidad de interés corresponde al promedio de la volatilidad futura

$$\sigma_{VS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt}$$

Utilizando el Lema de Ito sabemos que $d(\log S_t) = (\mu_t - \sigma_t^2/2)dt + \sigma_t dZ_t$, por lo cual se tiene que $dS_t/S_t - d(\log S_t) = \sigma_t^2 dt/2$ y la medida de volatilidad puede ser computada en función de la trayectoria del precio del activo

$$\sigma_{VS} = \sqrt{2 \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \right]}$$

El valor esperado de esta medida es fácilmente computable utilizando precios de opciones sobre el activo, no importando que estos estén *at-the-money*. Demeterfi, et. al (1999) define S_q como un valor límite entre opciones *call* y *put*. Con ello se tiene que

$$E(\sigma_{VS}^2) = \frac{2}{T} \left[rT - \left(\frac{S_0}{S_q} e^{rT} - 1 \right) - \log \left(\frac{S_q}{S_0} \right) + e^{rT} \int_0^{S_q} \frac{P(K)}{K^2} dK + e^{rT} \int_{S_q}^{\infty} \frac{C(K)}{K^2} dK \right]$$

Considere por ejemplo el caso simplificado donde el precio de ejercicio es el *forward* ($S_q = e^{rT}$) y el precio actual es uno, entonces:

$$E(\sigma_{VS}^2) = \frac{2e^{rT}}{T} \left[\int_0^{e^{rT}} \frac{P(K)dK}{K^2} + \int_{e^{rT}}^{\infty} \frac{C(K)dK}{K^2} \right]$$

Donde $C(K) = N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$ y $P(K) = -N(-d_1) + Ke^{-rT}N(-d_2)$. Un estimador de la expresión anterior es

$$\hat{\sigma}_{VS}^2 = \frac{2e^{rT}}{T} \left[\sum_{K_i \leq S_q} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} P(K_i) + \sum_{K_i > S_q} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} C(K_i) \right]$$

Este corresponde al índice de volatilidad computado por el CBOE para opciones sobre el S&P 500 (*VIX*), definido como

$$VIX = 100 \sqrt{\hat{\sigma}_{VS}^2 - \frac{1}{T} \left(\frac{F}{G} - 1 \right)^2}$$

Donde F es una aproximación del precio *forward* (un promedio entre las opciones *call* y *put at-the-money*) y G corresponde al precio de ejercicio inmediatamente inferior a F .

Tabla 3: Factores de Corrección y Eficiencia Relativa

N	Factor de Corrección		Eficiencia Relativa a CC (*)		
	HL	RS	HL	RS	GK
1	1,000	0,000			
2	1,250	0,250	2,78	1,00	1,78
3	1,500	0,333	3,28	1,33	2,37
4	1,594	0,406	3,09	1,77	2,43
5	1,700	0,450	3,28	2,06	2,73
6	1,760	0,490	3,27	2,28	2,83
7	1,826	0,518	3,39	2,47	3,04
8	1,868	0,544	3,40	2,63	3,14
9	1,914	0,564	3,49	2,77	3,31
10	1,946	0,583	3,52	2,89	3,40
11	1,980	0,599	3,58	3,00	3,53
12	2,005	0,613	3,59	3,09	3,61
13	2,033	0,626	3,65	3,18	3,72
14	2,053	0,638	3,67	3,26	3,79
15	2,075	0,648	3,71	3,33	3,89
16	2,092	0,657	3,73	3,40	3,95
17	2,111	0,666	3,76	3,45	4,04
18	2,125	0,674	3,78	3,51	4,09
19	2,141	0,682	3,81	3,57	4,16
20	2,154	0,689	3,82	3,61	4,21
21	2,168	0,695	3,85	3,66	4,28
22	2,179	0,701	3,86	3,70	4,33
Infinito	2,773	1,000	5,20	6,04	7,41

(*) Ajustado por factores de corrección.

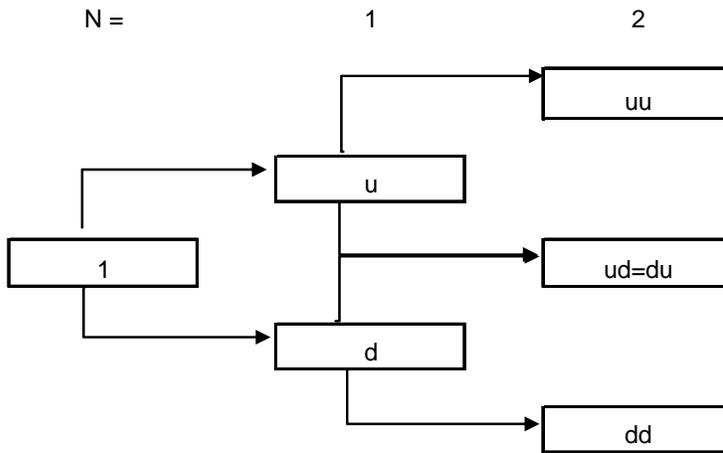
Fuente: Garman y Klass (1980), Rogers y Satchell (1991) y elaboración propia.

Tabla 4: Descriptiva de VIMA para variadas muestras
(porcentaje)

	Promedio	Mediana	Percentil 5%	Percentil 95%
Toda la muestra	12,27	10,06	3,92	28,04
Sep. 2001	16,29	12,60	4,68	30,27
Sep-Oct. 2002	13,85	12,57	5,90	25,94
May-Jun. 2006	12,95	10,62	3,66	27,10
Feb. 2007	17,29	13,93	5,38	47,10
Ago-Dic. 2007	18,12	15,01	5,60	34,05

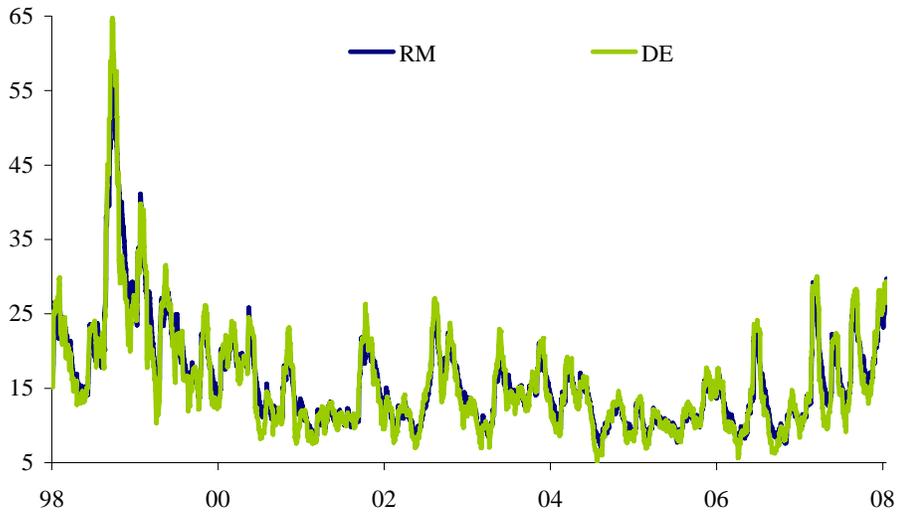
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 1: Modelo binomial para precio de activos



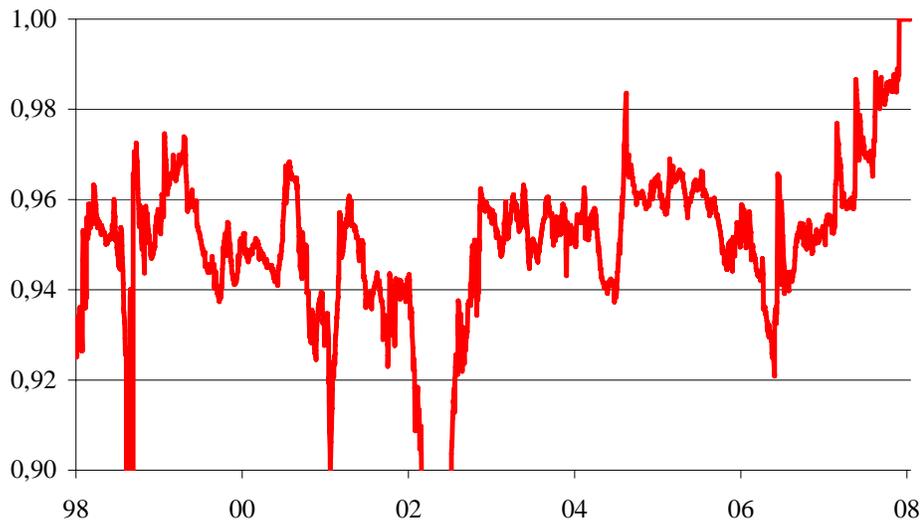
Fuente:Hull (2000) y elaboración propia.

Gráfico 2: RiskMetrics (RM) y Desviación Estándar Móvil con 21 días (DE) (porcentaje)



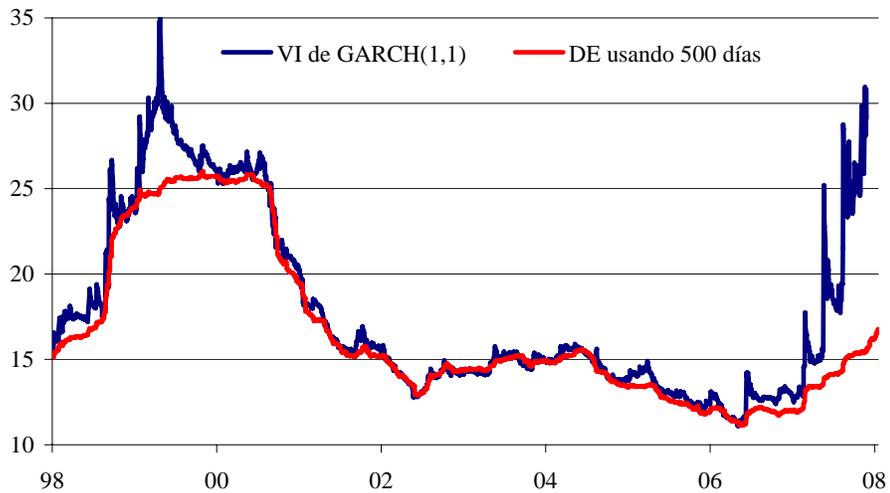
Fuente: Bloomberg.

Gráfico 3: Persistencia GARCH(1,1)



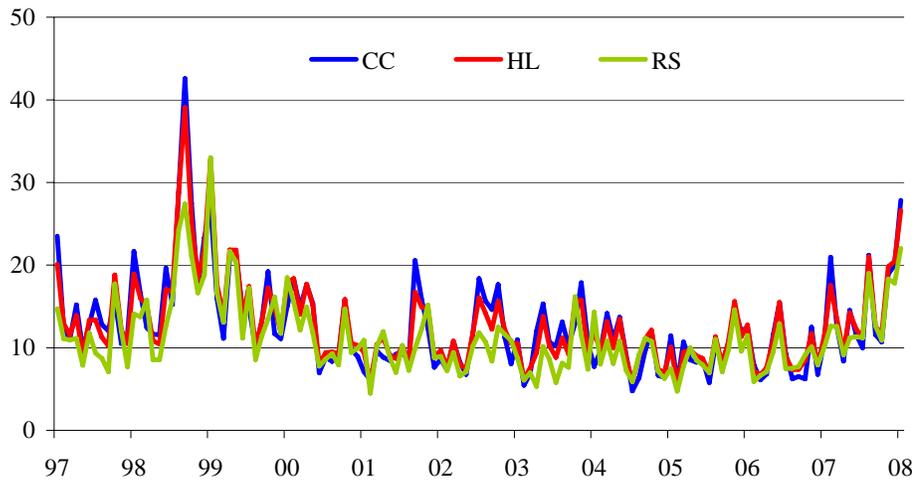
Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4: Volatilidad Incondicional (VI) y Desviación Estándar Móvil (DE) (porcentaje)



Fuente: Bloomberg y elaboración propia.

Gráfico 5: Medidas de Volatilidad
(porcentaje, promedios mensuales)



Fuente: Bloomberg y elaboración propia.

**Documentos de Trabajo
Banco Central de Chile**

**Working Papers
Central Bank of Chile**

NÚMEROS ANTERIORES

PAST ISSUES

La serie de Documentos de Trabajo en versión PDF puede obtenerse gratis en la dirección electrónica: www.bcentral.cl/esp/estpub/estudios/dtbc. Existe la posibilidad de solicitar una copia impresa con un costo de \$500 si es dentro de Chile y US\$12 si es para fuera de Chile. Las solicitudes se pueden hacer por fax: (56-2) 6702231 o a través de correo electrónico: bcch@bcentral.cl.

Working Papers in PDF format can be downloaded free of charge from: www.bcentral.cl/eng/stdpub/studies/workingpaper. Printed versions can be ordered individually for US\$12 per copy (for orders inside Chile the charge is Ch\$500.) Orders can be placed by fax: (56-2) 6702231 or e-mail: bcch@bcentral.cl.

DTBC-461 Marzo 2008
Medidas Extendidas de Restricciones a Los Flujos de Capitales
Jorge Selaive, Beatriz Velásquez y José Miguel Villena

DTBC-460 Marzo 2008
External Imbalances, Valuation Adjustments and Real Exchange Rate: Evidence of Predictability in an Emerging Economy
Pablo Pincheira y Jorge Selaive

DTBC-459 Febrero 2008
Combining Tests of Predictive Ability Theory and Evidence for Chilean and Canadian Exchange Rates
Pablo Pincheira

DTBC-458 Diciembre 2007
Copper Price, Fiscal Policy and Business Cycle in Chile
Juan Pablo Medina y Claudio Soto

DTBC-457 Diciembre 2007
The Chilean Business Cycles Through the Lens of a Stochastic General Equilibrium Model
Juan Pablo Medina y Claudio Soto

DTBC-456 Diciembre 2007
Is Ownership Structure a Determinant of Bank Efficiency?
Rodrigo Fuentes y Marcos Vergara

DTBC-455 Diciembre 2007
Estimating the Output Gap for Chile
Rodrigo Fuentes, Fabián Gredig y Mauricio Larraín

DTBC-454	Diciembre 2007
Un Nuevo Marco Para la Elaboración de los Programas de Impresión y Acuñaición	
Rómulo Chumacero, Claudio Pardo y David Valdés	
DTBC-453	Diciembre 2007
Development Paths and Dynamic Comparative Advantages: When Leamer Met Solow	
Rodrigo Fuentes y Verónica Mies	
DTBC-452	Diciembre 2007
Experiences With Current Account Deficits in Southeast Asia	
Ramon Moreno	
DTBC-451	Diciembre 2007
Asymmetric Monetary Policy Rules and the Achievement of the Inflation Target: The Case of Chile	
Fabián Gredig	
DTBC-450	Diciembre 2007
Current Account Deficits: The Australian Debate	
Rochelle Belkar, Lynne Cockerell y Christopher Kent	
DTBC-449	Diciembre 2007
International Reserves Management and the Current Account	
Joshua Aizenman	
DTBC-448	Diciembre 2007
Estimating the Chilean Natural Rate of Interest	
Rodrigo Fuentes y Fabián Gredig	
DTBC-447	Diciembre 2007
Valuation Effects and External Adjustment: A Review	
Pierre-Oliver Gourinchas	
DTBC-446	Diciembre 2007
What drives the Current Account in Commodity Exporting Countries? The cases of Chile and New Zealand	
Juan Pablo Medina, Anella Munro y Claudio Soto	
DTBC-445	Diciembre 2007
The Role of Interest Rates and Productivity Shocks in Emerging Market Fluctuations	
Mark Aguiar y Guita Gopinath	