
ANÁLISIS DE LOS COEFICIENTES BETA: EVIDENCIA EN EL MERCADO DE ACTIVOS CHILENO

Antonio Terceño
M. Glòria Barberà-Mariné
Yanina Laumann

I. INTRODUCCIÓN

El modelo de precios de activos de capital CAPM (Sharpe, 1964) es un modelo para la formación de carteras de valores óptimas que establece que el rendimiento esperado de cualquier activo, individual o cartera, es una función lineal y positiva de su riesgo sistémico medido a través del coeficiente beta (β), único riesgo remunerado en los mercados financieros. Suponiendo que existe un solo factor de riesgo agregado en la economía, podemos recurrir al modelo de mercado para estimar el riesgo beta de cualquier activo financiero. En la práctica, el riesgo beta no es más que el estimador de mínimos cuadrados ordinarios MCO de regresar el rendimiento del activo, individual o cartera (R_C) sobre el rendimiento de la cartera de mercado (R_c^M) durante un período de tiempo determinado.

$$R_C = \alpha + \beta R_c^M \quad (1)$$

El CAPM postula que, bajo determinadas condiciones en torno a la distribución del rendimiento de los activos, el rendimiento esperado de una acción está linealmente relacionado con la covarianza entre el rendimiento del activo y el rendimiento de la cartera de mercado (coeficiente β). Estas condiciones son: los inversores tienen expectativas homogéneas, sus carteras son eficientes en términos de la media y la varianza, no existen fricciones en el mercado, y se puede prestar y tomar prestado a la tasa de interés libre de riesgo. De tal forma que, cuando el mercado está en equilibrio, el inversor es remunerado solo por el riesgo sistémico o no diversificable, ya que el riesgo propio del título lo elimina en forma simple y sin costes a través de la diversificación de su cartera.

Por lo tanto, el riesgo sistémico de un activo, medido a través del coeficiente beta, es la única medida de riesgo relevante para determinar su precio. La importancia de beta se refleja en ser una medida del riesgo que va más allá de la propia validez del modelo teórico que lo sustenta como medida de riesgo relevante.

* Departamento de Gestión de Empresas - Universidad Rovira i Virgili - España; antonio.terceno@urv.cat

** Departamento de Gestión de Empresas - Universidad Rovira i Virgili - España; gloria.barbera@urv.cat

*** Departamento de Economía - Universidad Nacional del Sur - Argentina; yaninalaumann@yahoo.com

Contribuyendo a la literatura empírica sobre el riesgo sistemático, nuestro principal objetivo es calcular, conocer y describir coeficientes beta *fuzzy*, sectoriales e individuales, en el mercado emergente latinoamericano de Chile. Para ello, en primer lugar estimamos los coeficientes beta *fuzzy* y los beta estimados por MCO, comparando los resultados. Luego contrastamos si los resultados empíricos de la teoría tradicional de carteras, referente al efecto del número de títulos y de la longitud del período de estimación sobre la estabilidad de los beta, se verifican en las estimaciones *fuzzy*.

La literatura empírica financiera tradicional considera que las cotizaciones históricas de los activos pueden utilizarse para determinar las tasas de rendimiento de los activos. Sin embargo, el precio que se negocia en los mercados financieros durante una sesión para un determinado activo difícilmente es único, sino que suele negociarse dentro de una horquilla delimitada por un precio mínimo y por un precio máximo. Para utilizar las técnicas econométricas tradicionales deben cuantificarse las observaciones de la variable explicada (y explicativa) a través de un valor cierto utilizándose, por ejemplo, el precio medio negociado o el precio de cierre en el modelo que se vaya a implementar. Este proceder es una decisión arbitraria y conlleva una importante pérdida de información.

Para implementar los métodos de regresión *fuzzy* no hace falta reducir el valor de las variables observadas a un valor cierto de forma que se puede ajustar la relación funcional trabajando con el intervalo de todos los valores observados, es decir, utilizando toda la información disponible. Como resultado de la estimación *fuzzy* obtenemos el coeficiente beta *fuzzy*, también como un intervalo.

La regresión estadística presenta problemas cuando el número de observaciones es pequeño, hay dificultades para verificar que la función de distribución de los errores sea normal, hay incertidumbre en la relación entre las variables independientes y la dependiente, o cuando las observaciones de las variables son inciertas. Ante estas situaciones es más apropiado ajustar un modelo de regresión *fuzzy*.

En la regresión ordinaria, las desviaciones son vistas como una variable aleatoria con distribución normal, varianza constante y media cero, y se emplea la teoría de la probabilidad para modelar los errores aleatorios. En el caso de la regresión *fuzzy*, el término de error no queda introducido como un sumando en la ecuación de regresión, sino que está incorporado en los coeficientes al asumirse su naturaleza *fuzzy*.

El artículo se organiza de la siguiente forma: en la sección II revisamos la literatura; en la sección III se presenta el método de regresión *fuzzy* de Tanaka e Ishibuchi (1992) y el método de detección de *outliers* de Hung y Yang (2006); en la sección IV presentamos y analizamos los resultados de las estimaciones de los beta de activos y carteras del mercado chileno en el período 2010-15, y finalmente, exponemos las conclusiones en la sección V.

II. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Un número considerable de analistas de inversión, gerentes de fondos, directores financieros y asesores financieros utilizan el coeficiente beta en el proceso de toma de decisiones, ya que este se utiliza como una estimación del riesgo de un activo o una cartera. El coeficiente beta de un fondo de inversión, por ejemplo, es una información sustancial que delimita el riesgo del fondo respecto al mercado y, en consecuencia, es un elemento importante para la decisión de invertir o no en el mismo.

Una línea de investigación ha demostrado, ya fuese con un enfoque empírico o teórico, que la estabilidad de los coeficientes beta depende de varios factores (el índice de mercado empleado, el período de posesión, el período de estimación y el número de títulos constitutivos de una cartera, entre otros). A continuación exponemos los principales aportes respecto al efecto de la longitud del período de estimación y al efecto de formación de carteras, factores analizados en este trabajo.

El período de estimación de un título o cartera hace referencia al horizonte temporal que se va a utilizar como unidad de comparación al calcular beta. Levy (1971) y Blume (1971) encuentran que la capacidad de predicción aumenta cuando se consideran períodos más amplios. Las investigaciones empíricas de Baesel (1974), Roenfeldt et al. (1978), Eubank y Zumwalt (1981) y Harrington (1983) presentan resultados similares.

Asimismo Levy (1971) y Blume (1971) analizaron la estabilidad de los beta, tanto de valores individuales como de carteras. Sus resultados indican que el beta de un título individual fluctúa más que el de una cartera. La misma relación directa entre tamaño de las carteras y la estabilidad de los beta es observada por Altman et al. (1974), Eubank y Zumwalt (1981) y Tole (1981), entre otros. Por su parte, Damodaran (2001) reconoce que los beta de los activos oscilan mucho, pero afirma que los beta sectoriales (beta de la cartera compuesta por las empresas de un mismo sector) oscilan muy poco. Por eso recomienda utilizar el beta calculado de un sector. Por su parte, Yao y Gao (2004) señalan, desde una perspectiva práctica, que los beta son especialmente útiles en el contexto de sectores.

Para el caso particular del mercado de Chile, los trabajos son escasos. Entre la evidencia empírica encontramos el estudio de Ortas et al. (2010) que trata el tema de la estimación del coeficiente beta sectorial. Sus resultados indican que el coeficiente de riesgo sistemático de los principales índices bursátiles chilenos, de mercado o sectoriales, no es constante a lo largo del tiempo, proporcionando el filtro de Kalman una estimación recursiva más satisfactoria de su evolución a lo largo del tiempo. Chicoma et al. (2003) estiman betas del sector financiero a través del modelo de mercado aplicando MCO para estudiar comparativamente la disciplina del mercado en Japón, México, Chile y Argentina, en períodos de crisis financieras. Los coeficientes beta para los bancos en Chile fueron menores que uno, y relativamente bajos en relación con los beta del mismo sector de

los otros países que estiman. Fernández (2006) estima el CAPM para 24 activos de la bolsa de Chile durante el período 1996-2002 empleando el análisis *wavelet*. Encuentra evidencia a favor del CAPM a medio plazo.

La regresión *fuzzy*, como ya se ha comentado, es más versátil que la regresión convencional porque la relación funcional puede obtenerse cuando las variables independientes, la variable dependiente, o ambas, no son ciertas sino intervalos de confianza o números *fuzzy*.

Hay dos enfoques principales en el análisis de regresión *fuzzy*: el enfoque de regresión de mínimos cuadrados *fuzzy* (Diamond, 1988) y el enfoque de regresión posibilística, basado en programación lineal (Tanaka et al., 1982). Además han sido propuestos modelos híbridos que combinan ambos enfoques (Ishibuchi y Nii, 2001).

El enfoque basado en métodos de mínimos cuadrados *fuzzy* tiene como objetivo minimizar la distancia entre los valores de la variable dependiente estimados y los observados. Diamond (1988) propuso varios modelos para un ajuste simple de mínimos cuadrados de datos *fuzzy*. Celmiņš (1987a, 1987b), Savic y Pedrycz (1991), D'Urso y Gastaldi (2000), D'Urso (2003), Kao y Chyu (2003), D'Urso y Santoro (2006) y D'Urso et al. (2011), entre otros, continúan esta línea de trabajo.

La idea básica del enfoque posibilístico, desarrollado posteriormente por Tanaka (1987), Tanaka y Watada (1988) y Tanaka et al. (1989), consiste en minimizar la incertidumbre del modelo minimizando la amplitud de los coeficientes *fuzzy* sujeto a un criterio de ajuste especificado. Se obtienen diferentes modelos dependiendo del criterio de ajuste usado. Tanaka e Ishibuchi (1991) consideran funciones de pertenencia cuadráticas para obtener los coeficientes *fuzzy*, y Tanaka et al. (1995) una función de pertenencia exponencial. Tanaka y Lee (1998) consideran la tendencia central sobre el modelo posibilístico de Tanaka.

Varios autores advierten que los modelos de regresión posibilística son sensibles a los valores atípicos, comúnmente denominados *outliers*, debido a la relación de inclusión entre los datos observados y los estimados (Peters, 1994; Chang y Lee, 1994; Özelkan y Duckstein, 2000; Hung y Yang, 2006; Gladysz, 2010; Wang et al., 2015).

Hung y Yang (2006) destacan que la principal desventaja de la mayoría de los procedimientos de detección de *outliers* (Peters, 1994; Chen, 2001, entre otros) es la falta de definición de los puntos de corte de los *outliers*.

Terceño et al. (2014) proponen una representación *fuzzy* del modelo de mercado que incorpora el cálculo del rendimiento de un activo expresado a través de un intervalo de confianza. Esta metodología fue aplicada para estimar coeficientes beta *fuzzy* de sectores y subsectores de la Bolsa de Madrid. En Laumann (2015) se utilizó esta metodología para estimar los beta sectoriales en el mercado brasileño. En este artículo se avanza en esta línea de investigación mejorando la estimación *fuzzy* mediante el método de detección de *outliers* de Hung y Yang (2006) en la Bolsa de Valores de Santiago de Chile.

III. REGRESIÓN FUZZY LINEAL

El objetivo de la regresión *fuzzy* es determinar una relación funcional entre una variable dependiente con varias variables explicativas donde los parámetros estimados son intervalos de confianza. El modelo de regresión *fuzzy* que vamos a utilizar se encuentra desarrollado en Tanaka e Ishibuchi (1992).

1. Modelo de Tanaka e Ishibuchi

Tanaka e Ishibuchi parten, para un determinado fenómeno, de una muestra que representan como: $\{(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), \dots, (Y_j, X_j), \dots, (Y_n, X_n)\}$, donde:

- Y_j es la observación j -ésima de la variable dependiente, $j = 1, 2, \dots, n$, representada por un intervalo de confianza expresado a través de sus extremos inferior, Y_j^1 , y superior, Y_j^2 : $Y_j = [Y_j^1; Y_j^2]$ o bien a través de su centro, Y_{jC} , y radio, Y_{jR} : $Y_j = \langle Y_{jC}, Y_{jR} \rangle$, siendo $Y_{jC} = \frac{Y_j^2 + Y_j^1}{2}$ e Y_{jR} la distancia de cualquier extremo del intervalo a este punto medio. Si Y_j es un número cierto, $Y_j^1 = Y_j^2 = Y_{jC}$ e $Y_{jR} = 0$.
- X_j es un vector m -dimensional $X_j = (X_{0j}, X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{ij}, \dots, X_{mj})$ donde $X_{0j} = 1$, $\forall j$, y X_{ij} es el valor en la j -ésima observación para la variable independiente i -ésima, con $i = 0, \dots, m$ siendo las observaciones de la variable independiente representadas por datos ciertos.

El modelo asume que la relación existente entre la variable dependiente y la variable independiente es lineal:

$$Y = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \dots + A_m X_m \quad (2)$$

donde A_i es un intervalo de confianza que representan a través de su centro y radio, $A_i = \langle a_{iC}, a_{iR} \rangle$.

El objetivo final es minimizar la incertidumbre total de las estimaciones $\hat{Y}_j$. Los parámetros $\hat{A}_i$ deben procurar no solo que la incertidumbre de las estimaciones $\hat{Y}_j$ sea lo menor posible, sino que $\hat{Y}_j$ sea lo más congruente posible con la observación Y_j que pretenden aproximar.

Tanaka e Ishibuchi postulan que la observación de la variable explicada, Y_j , debe estar incluida dentro de su estimación, $\hat{Y}_j : Y_j \subseteq \hat{Y}_j, \forall j$. Así, el programa que plantean resolver es el siguiente:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n \hat{Y}_{jR} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \quad (3)$$

sujeto a:

$$\hat{Y}_{jC} - \hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} - \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \leq Y_{jC} - Y_{jR} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\hat{Y}_{jC} + \hat{Y}_{jR} = \sum_{i=0}^m a_{iC} X_{ij} + \sum_{i=0}^m a_{iR} |X_{ij}| \geq Y_{jC} + Y_{jR} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha_{iR} \geq 0$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

La función objetivo es la minimización de la incertidumbre, es decir, de la amplitud de los intervalos. La primera restricción asegura que los extremos inferiores de las estimaciones sean inferiores a los extremos inferiores de las observaciones, mientras la segunda garantiza que los extremos superiores de las estimaciones sean superiores a los de las observaciones. El tercer bloque de restricciones asegura que el radio de intervalo de confianza sea positivo.

2. Detección de *outliers* de Hung y Yang

Las series de datos pueden contener observaciones que son consideradas *outliers*, esto es, valores que se encuentran alejados del resto de los datos. Estos casos atípicos pueden presentarse en la variable dependiente, en la variable independiente, o en ambas, y también en la amplitud o en el centro de la variable dependiente estimada. La existencia de valores atípicos en los datos puede causar una interpretación incorrecta de los resultados de la regresión *fuzzy*.

Hung y Yang (2006) proponen un enfoque de omisión para el método de programación lineal de Tanaka e Ishibuchi. Este método mide la influencia de la observación l -ésima sobre el valor de la función objetivo cuando la observación l -ésima es omitida. El procedimiento consiste en borrar en primer lugar la observación l -ésima, resolver el programa de programación lineal con las restantes $(n - 1)$ observaciones y obtener el valor minimizado de la función objetivo (Z^l). De esta forma calculan el impacto de la observación l -ésima sobre el valor de la función objetivo a través de la diferencia normalizada r_l :

$$r_l = \frac{|Z - Z^l|}{Z} \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

donde Z es el valor mínimo de la función objetivo incluyendo todas las observaciones.

Un mayor valor de r_l indica un gran impacto de la observación l en el valor de la función objetivo. Para detectar los valores atípicos, se calcula el cuartil uno (Q1), el cuartil tres (Q3) y el rango intercuartílico (RIC=Q3–Q1) del conjunto de valores r_l y se eliminan aquellas observaciones cuyo valor r_l sea inferior a $Q1 - 1,5 \cdot RIC$ o superior a $Q1 + 1,5 \cdot RIC$.

IV. APLICACIÓN EMPÍRICA

1. Datos y Metodología

Durante el período 2010-2015, tomamos los precios diarios del Índice de Precios Selectivo de Acciones (IPSA), de los índices sectoriales construidos por la Bolsa de Comercio de Santiago y de dos empresas constitutivas de cada índice sectorial (cuadro 1).

Cuadro 1
Índices sectoriales de la Bolsa de Comercio de Santiago y empresas analizadas

Índices sectoriales	Empresas
Banca	Banco de Crédito e Inversiones (BCI)
	Banco Santander-Chile (BSANTANDER)
Commodities	Cap S.A. (CAP)
	Empresas CMPC S.A. (CMPC)
Construcción e inmobiliario	Salfacorp S.A. (SALFACORP)
	Besalco S.A. (BESALCO)
Consumo	Compañía Cervecerías Unidas S.A. (CCU)
	Viña Concha y Toro S.A. (CONCHATORO)
Industrial	Compañía Sud Americana de Vapores S.A. (VAPORES)
	Masisa S.A. (MASISA)
Retail	S.A.C.I. Falabella (FALABELLA)
	Empresas La Polar S.A. (NUEVAPOLAR)
Utilities	Colbún S.A. (COLBÚN)
	Empresa Nacional de Electricidad S.A. (ENDESA-CH)

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la Bolsa de Comercio de Santiago.

Para determinar la tasa de rendimiento semanal de cada índice tomamos los precios en su versión con dividendo que considera la reinversión de los pagos de dividendos en la cartera del índice, llamados índices de retorno absoluto, y se calcula a partir del correspondiente precio de cotización de los días viernes. De no existir cotización ese día, se toma la del día previo más reciente. Todos los datos empleados en esta investigación fueron obtenidos de *Datastream*.

Siguiendo a Terceño et al. (2014), calcularemos las rentabilidades semanales para cualquier activo financiero, de tres formas:

1. Tasa de rendimiento tradicional ($R_{c,t}$).

Calculamos la tasa de rendimiento tradicional de la semana t , $R_{c,t}$, como:

$$R_{C,t} = \frac{P_{cierre,t} - P_{cierre,t-1}}{P_{cierre,t-1}} 100, \quad (5)$$

donde $P_{cierre,t-1}$ y $P_{cierre,t}$ corresponden al precio de cierre del activo el día viernes de la semana $t-1$ y t , respectivamente.

2. Intervalo de rendimiento cierto ($[R_{1,t}; R_{2,t}]$).

Rentabilidad expresada por medio de un intervalo de confianza cuyos extremos coinciden y están dados por la tasa de rendimiento tradicional calculada según (6).

$$[R_{1,t}; R_{2,t}] = [R_{c,t}; R_{c,t}] \quad (6)$$

3. Intervalo de rendimiento incierto ($[R_{min,t}; R_{max,t}]$).

Rentabilidad expresada por medio de un intervalo de confianza cuyos extremos están dados por:

- $R_{min,t}$: rentabilidad mínima que puede obtener el inversor. Sucederá cuando compre el activo al mayor precio de cotización el día viernes de la semana $t-1$ ($PC_{max,t-1}$) y lo venda el día viernes de la semana t al menor precio ($PV_{min,t}$).

$$R_{min,t} = \frac{PV_{min,t} - PC_{max,t-1}}{PC_{max,t-1}} 100 \quad (7)$$

- $R_{max,t}$: rentabilidad máxima que puede obtener el inversor. Sucederá cuando compre el activo al menor precio de cotización el día viernes de la semana $t-1$ ($PC_{min,t}$) y lo venda al mayor precio el día viernes de la semana t ($PV_{max,t}$).

$$R_{max,t} = \frac{PV_{max,t} - PC_{min,t-1}}{PC_{min,t-1}} 100 \quad (8)$$

Calculamos estas rentabilidades semanales para cada activo y sector en el período 2010-2015 y estimamos los beta para los 24 trimestres naturales comprendidos en este período y los 12 semestres naturales del mismo período. Finalmente, para las comparaciones, utilizamos la media de los valores trimestrales y semestrales hallados.

Los coeficientes beta de los activos y sectores se estiman a través de dos metodologías:

1. MCO sobre la tasa de rendimiento tradicional del activo, R_c

$$R_c = \alpha_{MCO} + \beta_{MCO} R_c^M \quad (9)$$

donde R_c^M : rendimiento de la cartera de mercado, calculado a partir de la cotización de cierre.

2. Regresión *fuzzy* de Tanaka e Ishibuchi a partir de la representación *fuzzy* del modelo de mercado que incorpora el cálculo del rendimiento del activo, individual o de la cartera sectorial, expresado a través de un intervalo de confianza.

$$[R_1; R_2] = [\alpha_1; \alpha_2] + [\beta_1; \beta_2] R_c^M \quad (10)$$

donde:

R_c^M : rendimiento de la cartera de mercado, calculado a partir de la cotización de cierre.

$[R_1; R_2]$: rendimiento del activo expresado a través de un intervalo de confianza.

$[\alpha_1; \alpha_2], [\beta_1; \beta_2]$: intervalos de confianza, parámetros *fuzzy* a calcular.

Esta metodología la desarrollaremos utilizando dos tipos de tasas de rendimiento:

2.1 tasa de rendimiento *cierta* del activo expresada a través de un intervalo de confianza y calculada con los precios de cierre. En este caso obtenemos los coeficientes beta $[\beta_1^C; \beta_2^C]$

$$[R_c; R_c] = [\alpha_1^C; \alpha_2^C] + [\beta_1^C; \beta_2^C] R_c^M \quad (11)$$

2.2 tasa de rendimiento *incierto* del activo expresada a través de un intervalo de confianza y calculada a partir de las rentabilidades mínimas y máximas ya definidas. Con estos datos obtenemos los coeficientes beta $[\beta_1^U; \beta_2^U]$

$$[R_{min}; R_{max}] = [\alpha_1^U; \alpha_2^U] + [\beta_1^U; \beta_2^U] R_c^M \quad (12)$$

Sobre las series de rendimientos de datos inciertos aplicamos el método de detección de *outliers* de Hung y Yang. Eliminados estos, obtenemos los coeficientes beta $[\beta_1^{U-HY}; \beta_2^{U-HY}]$

$$[R_{min}; R_{max}] = [\alpha_1^{U-HY}; \alpha_2^{U-HY}] + [\beta_1^{U-HY}; \beta_2^{U-HY}] R_c^M \quad (13)$$

2. Análisis de resultados

Beta MCO vs beta fuzzy, con intervalo de rendimiento cierto

El cuadro 2 presenta los coeficientes beta promedios, trimestrales y semestrales, obtenidos mediante regresión por MCO ($\bar{\beta}_{MCO}$) y regresión *fuzzy* lineal ($[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$). En ambos casos se utiliza, para calcular el rendimiento del activo, su precio de cierre, ya sea expresado a través de un número cierto (R_c) o un intervalo de confianza ($[R_c; R_c]$), respectivamente. Se incluye también en el cuadro una medida de la distancia entre ambas estimaciones, $d(\bar{\beta}_{MCO}; [\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C])$. Si el valor del coeficiente beta obtenido por regresión ordinaria se sitúa dentro del intervalo de confianza estimado por regresión *fuzzy*, asignamos el valor 0 a la distancia; en caso contrario, medimos la distancia de ($\bar{\beta}_{MCO}$) al extremo más próximo del intervalo $[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$:

$$d(\bar{\beta}_{MCO}; [\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]) = 0 \text{ si } \bar{\beta}_1^C \leq \bar{\beta}_{MCO} \leq \bar{\beta}_2^C \quad (14)$$

$$d(\bar{\beta}_{MCO}; [\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]) = \left| \frac{\bar{\beta}_{MCO} - \bar{\beta}_1^C}{\bar{\beta}_1^C} \right| * 100 \text{ si } \bar{\beta}_{MCO} > \bar{\beta}_1^C \quad (15)$$

$$d(\bar{\beta}_{MCO}; [\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]) = \left| \frac{\bar{\beta}_{MCO} - \bar{\beta}_2^C}{\bar{\beta}_2^C} \right| * 100 \text{ si } \bar{\beta}_{MCO} > \bar{\beta}_2^C \quad (16)$$

Cuadro 2

Coefficientes beta estimados por regresión MCO y regresión fuzzy lineal. Rendimiento cierto

Sectores / Acciones	Trimestral			Semestral		
	$\bar{\beta}_{MCO}$	$[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$	$d(\bar{\beta}_{MCO}; [\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C])$	$\bar{\beta}_{MCO}$	$[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$	$d(\bar{\beta}_{MCO}; [\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C])$
CL - BANCA	0,91	[0,84; 0,91]	0,00	0,93	[0,90; 0,98]	0,00
BCI	0,97	[0,85; 0,95]	2,42	0,92	[0,91; 0,97]	0,00
BSANTANDER	1,04	[0,99; 1,16]	0,00	1,12	[1,10; 1,16]	0,00
CL - COMMODITIES	1,18	[1,16; 1,21]	0,00	1,18	[1,12; 1,17]	0,43
CAP	1,73	[1,41; 2,29]	0,00	1,79	[1,59; 2,61]	0,00
CMPC	1,29	[1,32; 1,33]	2,55	1,24	[1,37; 1,39]	9,46
CL - CONST. E INMOB.	0,95	[1,00; 1,10]	5,01	0,96	[1,11; 1,21]	13,58
SALFACORP	0,99	[1,21; 1,38]	18,22	1,04	[1,00; 1,10]	0,00
BESALCO	0,94	[0,94; 1,19]	0,54	1,00	[0,85; 1,14]	0,00
CL - CONSUMO	0,77	[0,78; 0,82]	1,70	0,76	[0,82; 0,84]	7,20
CCU	0,82	[0,92; 1,12]	10,56	0,85	[0,86; 0,87]	2,00
CONCHATORO	0,80	[0,91; 0,95]	12,95	0,78	[0,95; 0,95]	17,67
CL - INDUSTRIAL	1,02	[0,85; 1,05]	0,00	1,03	[0,90; 1,13]	0,00
VAPORES	1,06	[1,46; 1,77]	27,40	1,21	[1,75; 2,34]	31,09
MASISA	0,74	[0,79; 0,87]	6,30	0,75	[0,99; 1,06]	24,31
CL - RETAIL	1,08	[1,05; 1,07]	0,93	1,06	[1,09; 1,10]	2,94
FALABELLA	1,10	[1,21; 1,26]	9,35	1,03	[0,93; 1,02]	0,00
NUEVAPOLAR	1,18	[0,92; 1,07]	10,27	1,08	[1,30; 1,30]	16,45
CL - UTILITIES	0,86	[0,86; 0,89]	0,22	0,85	[0,82; 0,82]	4,50
COLBÚN	0,83	[0,80; 0,88]	0,00	0,77	[0,59; 0,78]	0,00
ENDESA-CH	1,01	[0,83; 0,95]	6,32	1,02	[0,92; 1,01]	1,01
($\bar{d}$) Promedio Sectores	-	-	1,12	-	-	4,09
($\bar{d}$) Promedio Acciones	-	-	7,63	-	-	7,29

Fuente: Elaboración propia.

En general, $(\bar{\beta}_{MCO})$ se encuentra a una distancia de $[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$ menor o igual a 10%, en estimaciones tanto trimestrales como semestrales. Esta afirmación es cierta para todos los índices sectoriales a excepción de la estimación semestral de Construcción e Inmobiliario. En el caso de las acciones individuales se constatan más excepciones. No obstante, aun en los casos en los cuales la distancia entre ambos coeficientes es mayor a 10%, los coeficientes $(\bar{\beta}_{MCO})$ y $[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$ son similares en cuanto a su clasificación de mayor, menor o igual a la unidad. De nuevo el índice sectorial Construcción e Inmobiliario es la excepción.

La distancia $d(\bar{\beta}_{MCO}; [\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C])$ en cada sector, en general, es menor que en cada acción constitutiva del mismo. No obstante, encontramos algunas situaciones llamativas. Por ejemplo, tanto para las estimaciones trimestrales como para las

semestrales, en el sector Industrial, $\bar{\beta}_{MCO}$ está contenida $[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$, sin embargo sus acciones, Vapores y Masisa, presentan las mayores distancias entre todas las estimaciones. En el caso de la acción Vapores, la distancia podría explicarse por un valor atípico en el primer trimestre del 2012, dada la sensibilidad del método de regresión *fuzzy* a los valores atípicos. Esta sensibilidad a los valores atípicos se corregirá posteriormente con el método de Hung y Yang.

A pesar de las excepciones mencionadas, al estar $\bar{\beta}_{MCO}$ muy próxima al intervalo $[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$ —incluso en muchos casos incluida en el mismo—, se confirma la bondad del método de regresión *fuzzy* y, siendo que este presenta ventajas respecto a la regresión MCO, ya que permite obtener una relación funcional cuando las variables no son ciertas, sostenemos la supremacía de estimación del coeficiente beta a partir del modelo de regresión *fuzzy*. Es por ello que procederemos, en la siguiente sección, a estimar los coeficientes beta utilizando, como rentabilidad asociada a cada activo, no un valor cierto, sino el intervalo de confianza que resulta de considerar todos los precios negociados en cada sesión.

Beta fuzzy: intervalo de rendimiento cierto vs incierto

Los extremos del intervalo de rendimiento incierto $[R_{min}; R_{max}]$ se calculan, según (8) y (9), considerando los precios de cotización mínimos y máximos en cada sesión. A partir de dicho rendimiento se obtiene el coeficiente beta *fuzzy* aplicando la regresión *fuzzy* lineal, $[\bar{\beta}_1^U; \bar{\beta}_2^U]$. Comparamos dichos coeficientes con los obtenidos en la sección anterior, $[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$. La comparación nos permitirá verificar si la utilización de toda la información sobre las cotizaciones diarias de un activo conduce a estimaciones que pudieran resultar poco precisas, lo que ocurriría si el resultado generara intervalos de confianza con una amplitud mucho mayor a la obtenida considerando únicamente el precio de cierre.

Para la comparación se observa la amplitud y también se ordenan ambos intervalos. En cuanto a la ordenación, en sentido estricto, dados dos intervalos de confianza $[a_1; a_2]$ y $[b_1; b_2]$, podemos afirmar que:

$$[a_1; a_2] \leq [b_1; b_2] \text{ si } a_2 \leq b_1 \quad (17)$$

Dado que esta relación de orden no es total, es decir, en la mayoría de las ocasiones no podría establecerse ninguna comparación, relajamos la exigencia estableciendo la siguiente relación de orden:

$$[a_1; a_2] \leq [b_1; b_2] \text{ si } a_1 \leq b_1 \text{ y } a_2 \leq b_2. \quad (18)$$

Esta relación tampoco es de orden total, por lo que utilizaremos, para la comparación de nuestras estimaciones, la siguiente:

$$[a_1; a_2] \leq [b_1; b_2] \text{ si } \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \frac{b_1 + b_2}{2} \quad (19)$$

El cuadro 3 presenta las estimaciones $[\bar{\beta}_1^U; \bar{\beta}_2^U]$ e incorpora las obtenidas en la sección anterior, $[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$. Se indica en qué casos se cumple que $[\bar{\beta}_1^U; \bar{\beta}_2^U] \leq [\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$.

El resultado permite comparar el efecto del cambio en la forma de considerar el rendimiento del activo.

Los datos del cuadro 3 indican que, en la mayoría de los casos, los coeficientes beta *fuzzy* calculados usando el precio de cierre son mayores a los obtenidos si consideramos el intervalo de confianza $[R_{min}; R_{max}]$. En cuanto a la amplitud, a pesar de que aumenta en la mayoría de los casos —como era de esperar—, no invalida la interpretación de las estimaciones. Sin embargo, como mencionamos en la revisión de la literatura, el método de regresión *fuzzy* es especialmente sensible a los valores atípicos por lo que, para conseguir una mejor estimación de los coeficientes beta, se hace necesaria su detección y omisión, que realizaremos, en la siguiente sección, a partir del método de Hung y Yang.

Cuadro 3

Coeficientes beta estimados por regresión *fuzzy* lineal. Rendimiento cierto vs rendimiento incierto

Sectores / Acciones	Trimestral			Semestral		
	$[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$	$[\bar{\beta}_1^U; \bar{\beta}_2^U]$	$[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C] \leq [\bar{\beta}_1^U; \bar{\beta}_2^U]$	$[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C]$	$[\bar{\beta}_1^U; \bar{\beta}_2^U]$	$[\bar{\beta}_1^C; \bar{\beta}_2^C] \leq [\bar{\beta}_1^U; \bar{\beta}_2^U]$
CL - BANCA	[0,84; 0,91]	[0,74; 0,88]	Sí	[0,90; 0,98]	[0,85; 0,99]	Sí
BCI	[0,85; 0,95]	[0,86; 0,91]	Sí	[0,91; 0,97]	[0,86; 0,97]	Sí
BSANTANDER	[0,99; 1,16]	[0,71; 0,97]	Sí	[1,10; 1,16]	[0,77; 0,96]	Sí
CL - COMMODITIES	[1,16; 1,21]	[0,99; 1,07]	Sí	[1,12; 1,17]	[1,01; 1,05]	Sí
CAP	[1,41; 2,29]	[1,31; 2,29]	Sí	[1,59; 2,61]	[1,71; 2,71]	No
CMPC	[1,32; 1,33]	[1,26; 1,36]	Sí	[1,37; 1,39]	[1,17; 1,29]	Sí
CL - CONST. E INMOB.	[1,00; 1,10]	[0,96; 1,02]	Sí	[1,11; 1,21]	[1,08; 1,09]	Sí
SALFACORP	[1,21; 1,38]	[1,12; 1,22]	Sí	[1,00; 1,10]	[0,83; 0,94]	Sí
BESALCO	[0,94; 1,19]	[1,07; 1,33]	No	[0,85; 1,14]	[0,94; 1,28]	No
CL - CONSUMO	[0,78; 0,82]	[0,81; 0,89]	No	[0,82; 0,84]	[0,83; 0,89]	No
CCU	[0,92; 1,12]	[0,83; 1,09]	Sí	[0,86; 0,87]	[0,81; 0,99]	No
CONCHATORO	[0,91; 0,95]	[0,74; 0,84]	Sí	[0,95; 0,95]	[0,88; 0,88]	Sí
CL - INDUSTRIAL	[0,85; 1,05]	[1,84; 1,98]	No	[0,90; 1,13]	[1,44; 1,56]	No
VAPORES	[1,46; 1,77]	[1,50; 1,76]	Sí	[1,75; 2,34]	[1,98; 2,24]	No
MASISA	[0,79; 0,87]	[0,85; 1,03]	No	[0,99; 1,06]	[0,93; 1,08]	No
CL - RETAIL	[1,05; 1,07]	[0,95; 0,97]	Sí	[1,09; 1,10]	[0,91; 0,91]	Sí
FALABELLA	[1,21; 1,26]	[0,99; 1,06]	Sí	[0,93; 1,02]	[0,89; 0,92]	Sí
NUEVAPOLAR	[0,92; 1,07]	[1,09; 1,68]	No	[1,30; 1,30]	[1,23; 1,37]	Sí
CL - UTILITIES	[0,86; 0,89]	[0,74; 0,79]	Sí	[0,82; 0,82]	[0,72; 0,77]	Sí
COLBÚN	[0,80; 0,88]	[0,68; 0,74]	Sí	[0,59; 0,78]	[0,40; 0,70]	Sí
ENDESA-CH	[0,83; 0,95]	[0,72; 0,81]	Sí	[0,92; 1,01]	[0,71; 0,83]	Sí

Fuente: Elaboración propia.

Beta fuzzy con rendimiento incierto aplicando el método de omisión de Hung y Yang. Estabilidad del coeficiente beta fuzzy

El cuadro 4 presenta los coeficientes beta estimados utilizando regresión *fuzzy* lineal y rendimiento incierto luego de eliminar los valores atípicos aplicando el método de omisión de Hung y Yang ($[\bar{\beta}_1^{U-HY}; \bar{\beta}_2^{U-HY}]$).

Con el fin de comparar la estabilidad de los coeficientes beta estimados, calculamos la desviación estándar de los beta inferiores, σ_{β_1} , de los beta superiores, σ_{β_2} , y la desviación conjunta de los coeficientes β_1 y β_2 ; $\sigma_{\beta_1; \sigma_{\beta_2}}$. Los resultados se presentan en el cuadro 5.

El análisis por columna verifica que los beta sectoriales trimestrales son más estables (presentan menor desviación estándar) que los beta trimestrales de sus correspondientes activos. En las estimaciones semestrales existen algunas excepciones, pero la diferencia es mínima.

Cuadro 4

Coeficientes beta estimados por regresión *fuzzy* lineal con rendimiento incierto aplicando el método de omisión de Hung y Yang

Sectores / Acciones	Trimestral	Semestral
	$[\bar{\beta}_1^{U-HY}; \bar{\beta}_2^{U-HY}]$	$[\bar{\beta}_1^{U-HY}; \bar{\beta}_2^{U-HY}]$
CL - BANCA	[0,73; 0,84]	[0,82; 0,90]
BCI	[0,91; 0,98]	[0,97; 1,09]
BSANTANDER	[0,78; 0,85]	[0,79; 0,92]
CL - COMMODITIES	[1,11; 1,16]	[1,11; 1,14]
CAP	[1,24; 1,64]	[1,42; 1,60]
CMPC	[1,09; 1,24]	[1,39; 1,41]
CL - CONST. E INMOB.	[0,88; 0,95]	[1,13; 1,14]
SALFACORP	[1,00; 1,01]	[1,19; 1,31]
BESALCO	[0,96; 1,11]	[1,19; 1,29]
CL - CONSUMO	[0,72; 0,80]	[0,82; 0,84]
CCU	[0,75; 0,81]	[0,82; 0,89]
CONCHATORO	[0,67; 0,77]	[0,61; 0,61]
CL - INDUSTRIAL	[0,84; 1,01]	[0,83; 1,00]
VAPORES	[0,87; 1,04]	[0,97; 1,49]
MASISA	[0,57; 0,77]	[0,80; 1,00]
CL - RETAIL	[0,90; 1,01]	[0,93; 1,02]
FALABELLA	[0,93; 1,03]	[0,93; 1,04]
NUEVAPOLAR	[0,68; 1,08]	[1,41; 1,89]
CL - UTILITIES	[0,68; 0,72]	[0,74; 0,76]
COLBUN	[0,65; 0,70]	[0,66; 0,77]
ENDESA-CH	[0,79; 0,86]	[0,69; 0,87]

Fuente: Elaboración propia.

El análisis por filas permite evaluar si la extensión del período de estimación afecta la estabilidad del coeficiente. Observamos que la desviación estándar de la beta semestral es menor que la correspondiente a la beta trimestral, con tres únicas excepciones (el índice sectorial *Retail*, su acción constitutiva Nueva Polar y el caso de la acción Masisa), de forma que verificamos que, a mayor período, mayor estabilidad.

Cuadro 5

Desviación estándar del coeficiente beta $\left[\bar{\beta}_1^{U-HY}; \bar{\beta}_2^{U-HY} \right]$

Sectores / Acciones	Estimación trimestral			Estimación semestral		
	$\sigma_{\beta_1^{U-HY}}$	$\sigma_{\beta_2^{U-HY}}$	$\sigma_{\beta_1^{U-HY} \beta_2^{U-HY}}$	$\sigma_{\beta_1^{U-HY}}$	$\sigma_{\beta_2^{U-HY}}$	$\sigma_{\beta_1^{U-HY} \beta_2^{U-HY}}$
BANCA	0,35	0,39	0,37	0,31	0,39	0,34
BCI	0,51	0,48	0,49	0,37	0,53	0,45
BSANTANDER	0,57	0,61	0,59	0,52	0,41	0,46
COMMODITIES	0,25	0,31	0,28	0,19	0,20	0,19
CAP	0,92	1,58	1,30	0,88	0,94	0,90
CMPC	0,62	0,60	0,61	0,50	0,51	0,49
CONST. E INMOB.	0,85	0,86	0,84	0,81	0,81	0,79
SALFACORP	0,98	0,99	0,98	0,79	0,83	0,80
BESALCO	1,19	1,23	1,20	0,71	0,88	0,78
CONSUMO	0,43	0,39	0,41	0,24	0,23	0,23
CCU	0,50	0,52	0,51	0,29	0,20	0,25
CONCHATORO	1,28	1,19	1,23	0,44	0,44	0,43
INDUSTRIAL	0,40	0,60	0,51	0,31	0,53	0,43
VAPORES	1,28	1,32	1,29	1,36	1,20	1,28
MASISA	0,80	0,84	0,81	0,97	0,88	0,91
RETAIL	0,39	0,51	0,45	0,51	0,59	0,54
FALABELLA	0,72	0,73	0,72	0,46	0,56	0,50
NUEVA POLAR	2,06	2,37	2,21	2,50	2,99	2,71
UTILITIES	0,30	0,32	0,31	0,19	0,19	0,18
COLBÚN	0,61	0,53	0,56	0,47	0,49	0,47
ENDESA-CH	0,47	0,49	0,47	0,38	0,29	0,35

Fuente: Elaboración propia.



V. CONCLUSIONES

Este trabajo constituye un aporte a la literatura en el cálculo del coeficiente beta, sectorial e individual, en el mercado chileno usando el método de regresión *fuzzy* lineal de Tanaka e Ishibuchi (1992) mejorado con el método de detección de *outliers* de Hung y Yang (2006).

Se muestra cómo el método de regresión por MCO y el método de regresión *fuzzy* reportan estimaciones del riesgo perfectamente comparables utilizando los mismos datos de entrada, teniendo en cuenta que dicha comparación se realiza entre un valor cierto y un intervalo de confianza. Asimismo, se observa que, incorporando toda la información disponible respecto a los precios de cotización de los activos, es decir, expresando la rentabilidad de los activos a través de un intervalo de confianza cuyos extremos representan la rentabilidad mínima y máxima, se obtiene un nivel de riesgo menor en la mayoría de las estimaciones, aunque aumente ligeramente la incertidumbre de la estimación, consecuencia lógica de incorporar mayor información. Finalmente, se confirma también, que los coeficientes beta estimados mediante regresión *fuzzy* verifican las hipótesis tradicionales de la teoría de carteras: los beta *fuzzy* sectoriales son más estables que los beta *fuzzy* de sus correspondientes activos individuales y los beta *fuzzy* semestrales son más estables que los beta *fuzzy* trimestrales.

REFERENCIAS

- Altman, E.I., B. Jacquillat y M. Levasseur (1974). "Comparative Analysis of Risk Measures: France and the United States". *Journal of Finance* 29(5): 1495–511.
- Baesel, J.B. (1974). "On the Assessment of Risk: Some Further Considerations". *Journal of Finance* 29(5): 1491–94.
- Blume, M.E. (1971). "On the Assessment of Risk". *Journal of Finance* 26(1): 1–10.
- Celmiņš, A. (1987a). "Least Squares Model Fitting to Fuzzy Vector Data". *Fuzzy Sets and Systems* 22(3): 245–69.
- Celmiņš, A. (1987b). "Multidimensional Least-Squares Fitting of Fuzzy Models". *Mathematical Modelling* 9(9): 669–90.
- Chang, P.T. y E.S. Lee (1994). "Fuzzy Linear Regression with Spreads Unrestricted in Sign". *Computers & Mathematics with Applications* 28(4): 61–70.
- Chen, Y.S. (2001). "Outliers Detection and Confidence Interval Modification in Fuzzy Regression". *Fuzzy Sets and Systems* 119(2): 259–72.
- Chicoma, J., E. Demaestri, M.P. Iannariello y P. Masci (2003). "Market Discipline and Stock Prices in Japan, Argentina, Chile and Mexico". En *Financial Crises in Japan and Latin America*, editado por E. Demaestri y P. Masci. Nueva York, N.Y.: Inter-American Development Bank.
- Damodaran, A. (2001). *The Dark Side of Valuation*. Upper Saddle River, NJ: Financial Times Press.
- Diamond, P. (1988). "Fuzzy Least Squares". *Information Sciences* 46(3): 141–57.
- D'Urso, P. (2003). "Linear Regression Analysis for Fuzzy/Crisp Input And Fuzzy/Crisp Output Data". *Computational Statistics and Data Analysis* 42(1–2): 47–72.
- D'Urso, P. y T. Gastaldi (2000). "A Least-Squares Approach to Fuzzy Linear Regression Analysis". *Computational Statistics & Data Analysis* 34(4): 427–40.
- D'Urso, P., R. Massari y A. Santoro (2011). "Robust Fuzzy Regression Analysis". *Information Sciences* 181(19): 4154–74.
- D'Urso, P. y A. Santoro (2006). "Goodness of Fit and Variable Selection in the Fuzzy Multiple Linear Regression". *Fuzzy Sets and Systems* 157(19): 2627–47.

Eubank, A.A. y J.K. Zumwalt (1981). "Impact of Alternative Length Estimation and Periods on the Stability of Security and Portfolio Betas". *Journal of Business Research* 9(3): 321–25.

Fernández, V. (2006). "The CAPM and value at risk at different time-scales". *International Review of Financial Analysis* 15(3): 203–19.

Gładysz, B. (2010). "A Method for Detecting Outliers in Fuzzy Regression". *Operations Research and Decisions* 20(2): 25–39.

Harrington, D.R. (1983). "Whose Beta is Best? *Financial Analysts Journal* 39(4): 67–73.

Hung, W.L. y M.S. Yang (2006). "An Omission Approach for Detecting Outliers in Fuzzy Regression Models". *Fuzzy Sets and Systems* 157(23): 3109–22.

Ishibuchi, H. y M. Nii (2001). "Numerical Analysis of the Learning of Fuzzified Neural Networks from Fuzzy If-Then Rules". *Fuzzy Sets and Systems* 120(3): 281–307.

Kao, C. y C. Chyu (2003). "Least-Squares Estimates in Fuzzy Regression Analysis". *European Journal of Operational Research* 148(2): 426–35.

Laumann, Y. (2015). "Analysis of Beta Coefficients in the Brazilian Stock Market Using Fuzzy Linear Regression Methodology". *Fuzzy Economic Review* XX(2): 3–17.

Levy, R.A. (1971). "On the Short-Term Stationarity of Beta Coefficients". *Financial Analysts Journal* 27(5): 55–62.

Ortas, E., J. Moneva y M. Salvador (2010). "Dinámica del Riesgo Sistemático en los Principales Índices Bursátiles del Mercado Chileno". *Panorama Socioeconómico* 28(40): 34–50.

Özelkan, E.C. y L. Duckstein (2000). "Multi-Objective Fuzzy Regression: A General Framework". *Computers & Operations Research* 27(7–8): 635–52.

Peters, G. (1994). "Fuzzy Linear Regression with Fuzzy Intervals". *Fuzzy Sets and Systems* 63(1): 45–55.

Roenfeldt, R.L., G.L. Griepentrog y C.C. Pflaum (1978). "Further Evidence on the Stationarity of Beta Coefficients". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13(1): 117–21.

Savic, D.A. y W. Pedrycz (1991). "Evaluation of Fuzzy Linear Regression Models". *Fuzzy Sets and Systems* 39(1): 51–63.

Sharpe, W.F. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk". *Journal of Finance* 19(3): 425–42.

Tanaka, H. (1987). "Fuzzy Data Analysis by Possibilistic Linear Models". *Fuzzy Sets and Systems* 24(3): 363–75.

Tanaka, H., I. Hayashi y J. Watada (1989). "Possibilistic Linear Regression Analysis for Fuzzy Data". *European Journal of Operational Research* 40(3): 389–96.

Tanaka, H. y H. Ishibuchi (1991). "Identification of Possibilistic Linear Systems by Quadratic Membership Functions of Fuzzy Parameters". *Fuzzy Sets and Systems* 41(2): 145–60.

Tanaka, H. y H. Ishibuchi (1992). "A Possibilistic Regression Analysis Based on Linear Programming". En *Fuzzy Regression Analysis*, editado por J. Kacprzyk y M. Fedrizzi. Heidelberg, Alemania: Physica-Verlag Heidelberg.

Tanaka, H., H. Ishibuchi y S. Yoshikawa (1995). "Exponential Possibility Regression Analysis". *Fuzzy Sets and Systems* 69(3): 305–18.

Tanaka, H. y H. Lee (1998). "Interval Regression Analysis by Quadratic Programming Approach". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 6(4): 473–81.

Tanaka, H., S. Uejima y K. Asai (1982). "Linear Regression Analysis With Fuzzy Model". *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 12(6): 903–7.

Tanaka, H. y J. Watada (1988). "Possibilistic Linear Systems and Their Application to the Linear Regression Model". *Fuzzy Sets and Systems* 27(3): 275–89.

Terceño, A., G. Barberà-Mariné H. Vigier y Y. Laumann (2014). "Stability of Beta Coefficients of Sector and Subsector Portfolios in an Uncertain Environment". *Computer Science and Information Systems* 11(2): 859–80.

Tole, T.M. (1981). "How to Maximize Stationarity of Beta". *Journal of Portfolio Management*, 7(2): 45–49.

Yao, J. y J. Gao (2004). "Computer-Intensive Time-Varying Model Approach to the Systematic Risk of Australian Industrial Stock Returns". *Australian Journal of Management* 29(1): 121–45.

Wang, C., J. Li y P. Guo (2015). "The Normalized Interval Regression Model with Outlier Detection and its Real-World Application to House Pricing Problems". *Fuzzy Sets and Systems* 274: 109–23.